

МАЙОРАНОВСКИЕ НЕЙТРИНО В РЕДКИХ РАСПАДАХ МЕЗОНОВ

А. Али*, А. В. Борисов[†] М. В. Сидорова

Московский государственный университет, Россия

Поступила в редакцию 18.04.2005 г.; после доработки 15.08.2005 г.

(Ядерная физика, 2006, том 69, № 3, с. 497–506)

Рассмотрены редкие распады мезонов $K^+ \rightarrow \pi^- \ell^+ \ell'^+$ и $D^+ \rightarrow K^- \ell^+ \ell'^+$ ($\ell, \ell' = e, \mu$) с несохранением лептонного числа, обусловленные обменом майорановскими нейтрино. Учтены эффекты структуры мезонов на основе гауссовой модели для амплитуд Бете–Солпитера. Показано, что существующие прямые экспериментальные ограничения на относительные вероятности распадов слишком слабы и не позволяют установить реальные ограничения на эффективные майорановские массы. На основе ограничений на параметры лептонного смешивания и массы нейтрино, найденных из прецизионных измерений электрослабых процессов, экспериментов по нейтринным осцилляциям, поиску двойного безнейтринного бета-распада ядер и космологических данных, получены косвенные ограничения на вероятности указанных распадов, которые значительно жестче прямых ограничений.

PACS: 13.20.Eb, 13.20.Fc, 14.60.Rq

1. В последние несколько лет в ряде экспериментов (SNO, Super-Kamiokande, KamLAND и др.) зарегистрированы осцилляции солнечных, атмосферных и реакторных нейтрино (см., например, обзоры [1, 2]). Наличие осцилляций означает [3], что нейтрино являются массивными частицами и при этом смешиваются: нейтрино определенных ароматов ν_ℓ , входящие в слабый ток вместе с соответствующими заряженными лептонами $\ell = e, \mu, \tau$, представляют собой когерентные суперпозиции

*A. Ali (DESY, Hamburg)

[†]E-mail: borisov@phys.msu.ru

состояний ν_i с определенными массами m_i :

$$\nu_\ell = \sum_i U_{\ell i} \nu_i, \quad (1)$$

где $U_{\ell i}$ — элементы матрицы лептонного смешивания.

Экспериментальные данные по осцилляциям нейтрино, бета-распаду трития, поискам безнейтринного двойного бета-распада и прецизионные измерения космологических параметров позволили получить ряд ограничений на массы нейтрино и параметры лептонного смешивания [2, 4, 5].

Однако фундаментальная проблема физики нейтрино — природа их массы (дираковская она или майорановская) — остается нерешенной. Как известно, нейтринные осцилляции нечувствительны к типу массы. Дираковское нейтрино несет лептонное число, отличающее его от антинейтрино, и механизм генерации дираковских масс нейтрино такой же, как масс квarks и заряженных лептонов. Майорановское нейтрино — истинно нейтральная частица, тождественная своей античастице. Майорановский массовый член в лагранжиане не сохраняет лептонное число, изменяя его на две единицы [3]. Поэтому майорановские нейтрино могут приводить к многочисленным процессам с несохранением лептонного числа. Поиск таких процессов является одним из важных направлений физики элементарных частиц.

Наиболее чувствительным к майорановской природе массы нейтрино является безнейтринный двойной бета-распад ядер ($0\nu\beta\beta$): $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^-$, поиски которого ведутся в течение многих лет. О его наблюдении с 2001 г. сообщает группа Heidelberg–Moscow (см. ее недавнюю работу [6]). Однако другие экспериментальные группы этот результат пока не подтверждают (см., например, обзор [2]).

Указанный процесс относится к широкому классу реакций, в которых рождается пара одинаково заряженных лептонов (дилептон) вследствие элементарного подпроцесса аннигиляции пары виртуальных W -бозонов в дилептон ($W^\pm W^\pm \rightarrow \ell^\pm \ell'^\pm$) через обмен майорановским ней-

трино: редкие распады мезонов типа $M^+ \rightarrow M'^-\ell^+\ell'^+$ (см., например, [7]), глубоконеупругие адрон-адронные и лептон-адронные столкновения $pp \rightarrow \ell^\pm\ell'^\pm X$ [8, 9], $e^+p \rightarrow \bar{\nu}_e\ell^+\ell'^+X$ [10, 11] и др.

В нашей работе [7] были рассмотрены распады K -, D -, D_s - и B -мезонов типа

$$M^+ \rightarrow M'^-\ell^+\ell'^+. \quad (2)$$

На основе экспериментальных данных для относительных вероятностей распадов были получены ограничения сверху на эффективные майорановские массы, величины которых оказались вне пределов применимости использованных формул для ширин распадов. Это означает, что современные экспериментальные ограничения слишком слабые. Используя ограничения на эффективные массы, следующие из экспериментов по $0\nu\beta\beta$ -распаду, бета-распаду трития и осцилляциям нейтрино, мы нашли косвенные ограничения на относительные вероятности указанных распадов. Эти ограничения оказались на много порядков жестче прямых экспериментальных, что подтвердило слабость последних.

В настоящей работе мы рассматриваем распады D -мезона указанного типа,

$$D^+ \rightarrow K^-\ell^+\ell'^+, \quad (3)$$

где $\ell, \ell' = e, \mu$. Для их ширин в работе [7] были получены лишь достаточно грубые оценки. Эти распады выделены тем, что их амплитуды содержат дополнительное кабибовское подавление (см. ниже), и для расчета ширин распадов необходимо использовать конкретную модель адронной динамики (точнее, амплитуды Бете–Солпитера (БС) для мезона как связанного состояния кварк-антикварковой пары). Кроме того, мы подтверждаем справедливость приближенного (безмодельного) метода расчета, использованного в [7] для других распадов.

2. Амплитуде редкого распада мезона типа (2) в низшем порядке теории возмущений отвечают четыре фейнмановские диаграммы, две из которых, (*t*) и (*b*), показаны на рис. 1, а две другие получаются из них

очевидной перестановкой лептонных линий ℓ и ℓ' . На этом рисунке, взятом из работы [12], N — майорановское нейтрино, жирные вершины соответствуют БС-амплитудам для мезонов.

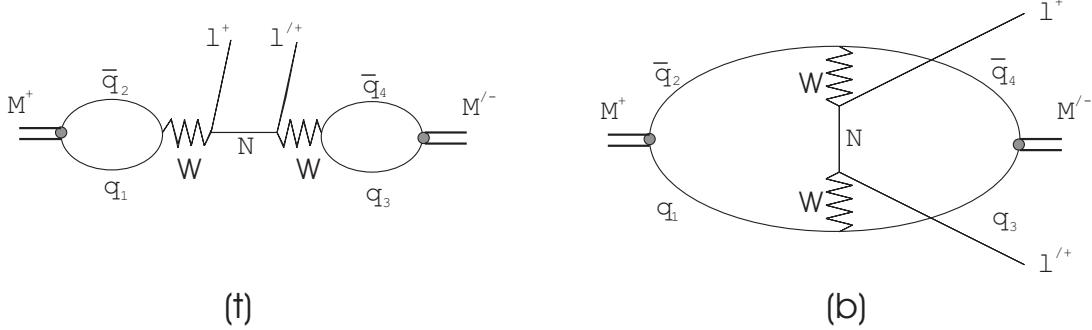


Рис. 1. Фейнмановские диаграммы процесса (2)

Ширина распада (2) имеет вид

$$\Gamma_{\ell\ell'} = \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{\ell\ell'}\right) \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P' + p + p' - P) \frac{|A_t + A_b|^2}{2m_M} \frac{d^3 P' d^3 p d^3 p'}{2^3 (2\pi)^9 P'^0 p^0 p'^0}, \quad (4)$$

где A_t и A_b — вклады в амплитуду процесса диаграмм (t) и (b) соответственно (от англ. tree и box), показанных на рис. 1 (здесь и ниже всегда подразумевается также учет кросс-симметричных диаграмм). Используя метод БС-амплитуд работы [13], получаем для них следующие выражения:

$$A_i = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 q d^4 q' H_{\mu\nu}^{(i)} L_i^{\mu\nu}, \quad i = t, b. \quad (5)$$

Здесь лептонные тензоры

$$L_i^{\mu\nu} = \frac{g^4}{4} \frac{g^{\mu\alpha}}{p_i^2 - m_W^2} \frac{g^{\nu\beta}}{p_i'^2 - m_W^2} \sum_N U_{\ell N} U_{\ell' N} \eta_N m_N \times \left(\bar{v}^c(p) \left[\frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{(p_i - p)^2 - m_N^2} + \frac{\gamma_\beta \gamma_\alpha}{(p_i - p')^2 - m_N^2} \right] \Lambda_L v(p') \right), \quad (6)$$

η_N — фазовый фактор зарядового сопряжения поля майорановского нейтрино массы m_N , $N = \eta_N N^c$ ($|\eta_N| = 1$); $\Lambda_L = (1 + \gamma^5)/2$ — левый проектор,

$$p_t = P, \quad p'_t = P'; \quad p_b = \frac{1}{2} (P - P') + q' - q, \quad p'_b = \frac{1}{2} (P - P') - q' + q. \quad (7)$$

Адронные тензоры

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(t)} &= \text{Tr} \left\{ \chi_P(q) V_{12} \gamma_\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} \right\} \text{Tr} \left\{ \bar{\chi}_{P'}(q') V_{43} \gamma_\nu \frac{1 + \gamma^5}{2} \right\}, \\ H_{\mu\nu}^{(b)} &= \text{Tr} \left\{ \chi_P(q) V_{13} \gamma_\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} \bar{\chi}_{P'}(q') V_{42} \gamma_\nu \frac{1 + \gamma^5}{2} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

выражаются через элементы матрицы Кобаяши–Маскава V_{jk} (индексы соответствуют нумерации кварковых линий на рис. 1) и мезонные БС-амплитуды (в импульсном представлении) [13]

$$\chi_P(q) = \int d^4x e^{iq \cdot x} \chi_P(x) = \gamma^5 (1 - \delta_M \hat{P}) \varphi_P(q) \phi_G. \quad (9)$$

Здесь

$$\delta_M = (m_1 + m_2)/m_M^2, \quad (10)$$

m_M — масса мезона M , состоящего из кварка q_1 и антикварка \bar{q}_2 с массами (токовыми) m_1 и m_2 и относительным 4-импульсом $q = (p_1 - p_2)/2$, $P = p_1 + p_2$ — 4-импульс мезона, $\hat{P} = \gamma^\mu P_\mu$; $\varphi_P(q)$ — скалярная функция, явный вид которой зависит от выбора модели (см. ниже (11)); ϕ_G — $SU(N_f) \times SU(N_c)$ -групповой фактор.

Структура амплитуды (9) определена в [13] на основе ряда феноменологических аргументов, а функция $\varphi_P(q)$ выбрана в гауссовом виде, соответствующем релятивистскому обобщению нерелятивистской кварковой модели с потенциалом гармонического осциллятора:

$$\varphi_P(q) = \frac{4\pi}{\alpha^2} [1 - (m_M \delta_M)^2]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left[2 \left(\frac{P \cdot q}{m_M} \right)^2 - q^2 \right] \right\}, \quad (11)$$

где α — параметр модели. Эта функция нормирована условием

$$[1 - (m_M \delta_M)^2] \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} |\varphi_P(q)|^2 = 1,$$

к которому сводится стандартное условие нормировки БС-амплитуды (9) (см., например, [14]).

Напомним определение БС-амплитуды мезона в координатном представлении (см., например, [15]) как матричного элемента хронологического произведения кваркового и антикваркового полей:

$$\begin{aligned} \chi_P(x_1, x_2) &= -\frac{i}{\sqrt{N_c}} \langle 0 | T\{q_1^a(x_1) \bar{q}_{2a}(x_2)\} | M(P) \rangle = e^{-iP \cdot X} \chi_P(x), \\ \chi_P(x) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot x} \chi_P(q), \end{aligned} \quad (12)$$

где $X = (x_1 + x_2)/2$ и $x = x_1 - x_2$ — координаты центра масс и относительные координаты соответственно; $a = 1, 2, 3$ — цветовой индекс (число цветов $N_c = 3$), суммирование по которому обеспечивает бесцветность мезона.

Используя известное определение константы распада мезона f_M через матричный элемент аксиально-векторного тока [16], с учетом (12) получаем

$$if_M P^\mu = \langle 0 | \bar{q}_{2a}(0) \gamma^\mu \gamma^5 q_1^a(0) | M(P) \rangle = -i\sqrt{N_c} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5 \chi_P(x = 0)].$$

Отсюда и из (9), (12) находим соотношение:

$$f_M = 4\sqrt{N_c} \delta_M \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \varphi_P(q). \quad (13)$$

Подставив сюда (11) и выполнив интегрирование, получаем выражение параметра модели через известные величины:

$$\alpha^2 = \frac{\pi}{4\sqrt{N_c}} [1 - (m_M \delta_M)^2]^{1/2} \frac{f_M}{\delta_M}. \quad (14)$$

Массы всех рассматриваемых ниже мезонов $m_M \ll m_W$, и поэтому мы используем 4-фермионное (ток-токовое) приближение для амплитуды процесса, оставив в знаменателях пропагаторов W -бозонов, входящих в лептонные тензоры (6), лишь $-m_W^2$ и введя постоянную Ферми согласно $G_F/\sqrt{2} = g^2/8m_W^2$.

Вклад диаграммы (t) в амплитуду распада (см. рис. 1) находим из (5), (6) и (8) с учетом (13). Он, как известно, оказывается независящим от деталей адронной динамики и выражается через экспериментально измеренные [4] (или вычисленные в решеточной КХД [17]) константы распада начального и конечного мезонов:

$$A_t = -\frac{1}{4} f_M f_{M'} V_{12} V_{43} P_\mu P'_\nu L_t^{\mu\nu}. \quad (15)$$

Вклад же диаграммы (b) в общем случае зависит от структуры мезонов (вида их БС-амплитуд):

$$\begin{aligned} A_b = & 2V_{13}V_{42}\delta_M\delta_{M'}(P_\mu P'_\nu + P_\nu P'_\mu - g_{\mu\nu}P \cdot P' + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\alpha P'^\beta) \times \\ & \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \varphi_P(q) \varphi_{P'}(q') L_b^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее мы ограничимся двумя предельными случаями тяжелых и легких майорановских нейтрино.

3. Для тяжелых нейтрино $m_N \gg m_M$, и в основном порядке разложения по $1/m_N^2$ и $1/m_W^2$ лептонные тензоры для t - и b -диаграмм (см. (6)) совпадают:

$$\begin{aligned} L_t^{\mu\nu} &= L_b^{\mu\nu} = -16g^{\mu\nu}L(p, p') , \\ L(p, p') &= G_F^2 \langle m_{\ell\ell'}^{-1} \rangle \left(\bar{v}^c(p) \frac{1+\gamma^5}{2} v(p') \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь введена эффективная обратная майорановская масса согласно

$$\langle m_{\ell\ell'}^{-1} \rangle = \sum_N U_{\ell N} U_{\ell' N} \eta_N \frac{1}{m_N}. \quad (18)$$

Для полной амплитуды распада из (15), (16) и (17) с учетом (13) получаем выражение

$$A = A_t + A_b = 4K_V f_M f_{M'}(P \cdot P') L(p, p') , \\ K_V = V_{12}V_{43} + \frac{1}{N_c}V_{13}V_{42} . \quad (19)$$

Таким образом, для тяжелых нейтрино амплитуда процесса оказывается модельно независимой, что следует из независимости в этом случае лептонного тензора $L_b^{\mu\nu}$ от аргументов q и q' (см.(17)) БС-амплитуд в выражении (16) для вклада диаграммы (b).

Как видно из (19), вклады обеих диаграмм пропорциональны друг другу и различаются лишь значениями матричных элементов V_{jk} , а также фактором $1/N_c$ в b-вкладе. Происхождение этого фактора цветового подавления объясняется различием структуры диаграмм рис. 1 (и не связано с величиной массы нейтрино): t -диаграмме отвечает независимое суммирование по цветам в каждой из двух петель, а в b -диаграмме цвет кварка q_1 (антикварка \bar{q}_2) совпадает с цветом кварка q_3 (соответственно антикварка \bar{q}_4) ввиду бесцветности W -бозона. Указанную же пропорциональность вкладов диаграмм также легко понять, заметив, что в рассматриваемом пределе отрезки WNW диаграмм, отвечающие произведению пропагаторов тяжелых частиц, стягиваются в точки, и диаграммы становятся топологически эквивалентными, различаясь лишь порядком цветового суммирования.

Заметим, что результат (19) был впервые получен в [7]. Он был подтвержден в недавней работе [18], где рассмотрен редкий распад

$$K^+ \rightarrow \pi^- \ell^+ \ell'^+ \quad (20)$$

на основе релятивистской модели конституентных夸克ов. Для этого распада

$$V_{12} = V_{42} = V_{us}, \quad V_{43} = V_{13} = V_{ud}, \quad (21)$$

и согласно (19) в этом случае

$$A_b = \frac{1}{N_c} A_t. \quad (22)$$

Авторы [18] пришли в этом случае ($m_N \gg m_K$) к эквивалентному (ввиду (17)) выводу для адронных тензоров (8):

$$H_{\mu\nu}^{(b)} = \frac{1}{3} H_{\mu\nu}^{(t)}.$$

Отметим, что в [18] использованы другие индексы для обозначения вкладов диаграмм рис. 1: s и t вместо наших t и b соответственно.

Подставив (19) в (4) и выполнив интегрирование по фазовому объему, получим ширину распада (2) в следующем виде [7]:

$$\Gamma_{\ell\ell'} = \frac{G_F^4 m_M^7}{128\pi^3} f_M^2 f_{M'}^2 |K_V|^2 |\langle m_{\ell\ell'}^{-1} \rangle|^2 \Phi_{\ell\ell'}. \quad (23)$$

Здесь $\Phi_{\ell\ell'}$ — приведенный фазовый интеграл. Для случая тождественных лептонов ($\ell' = \ell$)

$$\Phi_{\ell\ell} = \int_{4z_0}^{z_1} dz (z - 2z_0) \left[\left(1 - \frac{4z_0}{z}\right) (z_1 - z) (z_2 - z) \right]^{1/2} (1 + z_3 - z)^2. \quad (24)$$

Для различных лептонов ($\ell' \neq \ell$) соответствующее выражение более громоздко, и мы, учитывая иерархию масс лептонных поколений, ограничимся, как и в [7], главным членом разложения по массовому параметру $m_{\ell'}/m_{\ell} \ll 1$:

$$\Phi_{\ell\ell'} = 2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z} (z - z_0)^2 [(z_1 - z) (z_2 - z)]^{1/2} (1 + z_3 - z)^2. \quad (25)$$

В (24) и (25) введены массовые параметры

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\frac{m_{\ell}}{m_M}\right)^2, \quad z_1 = (1 - \sqrt{z_3})^2, \quad z_2 = (1 + \sqrt{z_3})^2, \\ z_3 &= \left(\frac{m_{M'}}{m_M}\right)^2, \end{aligned} \quad (26)$$

а переменная интегрирования $z = (P - P')^2 / m_M^2$ представляет собой нормированную инвариантную массу лептонной пары.

Рассмотрим относительную вероятность распада (2) (отношение ширины данной моды распада к полной ширине, branching ratio)

$$B_{\ell\ell'} = \frac{\Gamma(M^+ \rightarrow M'^-\ell^+\ell'^+)}{\Gamma(M^+ \rightarrow \text{all})}. \quad (27)$$

Используя (23), (24) и (25), вычислим отношения

$$C_{\ell\ell'} = \frac{B_{\ell\ell'}}{\left|\langle m_{\ell\ell'}^{-1} \rangle\right|^2}. \quad (28)$$

Для рассматриваемых распадов (20) и (3) учтем соответственно выражения (21) и

$$\begin{aligned} V_{12} &= V_{cd} = -0.224, \quad V_{43} = V_{us} = 0.2200, \\ V_{13} &= V_{cs} = 0.996, \quad V_{42} = V_{ud} = 0.9738. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим сильное (двойное) кабибровское подавление вклада t -диаграммы (см. (29) и (19)) в амплитуду процесса (3): $A_t/A_b \simeq -0.15$ (ср. с (22) для распада (20)).

Результаты численных расчетов величин (28) приведены в табл. 1. Значения необходимых констант и современные прямые экспериментальные ограничения на относительные вероятности (27) взяты из [4], кроме значения $f_{D^+} = 228$ МэВ, полученного в решеточной КХД [17].

Из (28) с учетом значений $C_{\ell\ell'}$ и $B_{\ell\ell'}^{\text{exp}}$ (третий и второй столбцы табл. 1 соответственно) получаем, что прямые верхние ограничения на обратные майорановские массы из редких распадов мезонов пока не имеют реального физического значения:

$$\left|\langle m_{\ell\ell'}^{-1} \rangle\right|_{\text{exp}} = (B_{\ell\ell'}^{\text{exp}} / C_{\ell\ell'})^{1/2} \gg (m_M - m_{M'})^{-1}. \quad (30)$$

Действительно, из определения (18) следует

$$\left|\langle m_{\ell\ell'}^{-1} \rangle\right| < \sum_N m_N^{-1}, \quad (31)$$

Таблица 1. Экспериментальные и косвенные ограничения сверху на относительные вероятности $B_{\ell\ell'}$ редких распадов мезонов $M^+ \rightarrow M'^-\ell^+\ell'^+$, обусловленных обменом тяжелыми майорановскими нейтрино ($m_N \gg m_M$)

Редкий распад	Эксп. огран. на $B_{\ell\ell'}$	$C_{\ell\ell'}$ [МэВ 2]	Косв. огран. на $B_{\ell\ell'}$
$K^+ \rightarrow \pi^- e^+ e^+$	6.4×10^{-10}	8.5×10^{-10}	5.9×10^{-32}
$K^+ \rightarrow \pi^- \mu^+ \mu^+$	3.0×10^{-9}	2.4×10^{-10}	1.1×10^{-24}
$K^+ \rightarrow \pi^- e^+ \mu^+$	5.0×10^{-10}	1.0×10^{-9}	5.1×10^{-24}
$D^+ \rightarrow K^- e^+ e^+$	1.2×10^{-4}	2.2×10^{-9}	1.5×10^{-31}
$D^+ \rightarrow K^- \mu^+ \mu^+$	1.3×10^{-5}	2.0×10^{-9}	8.9×10^{-24}
$D^+ \rightarrow K^- e^+ \mu^+$	1.3×10^{-4}	4.2×10^{-9}	2.1×10^{-23}

причем в рассматриваемом случае тяжелых нейтрино $m_N \gg m_M$, а из ограничения, например, на распад $K^+ \rightarrow \pi^- e^+ \mu^+$ с учетом (30) находим $|\langle m_{\ell\ell'}^{-1} \rangle|_{\text{exp}} = (1.4 \text{ МэВ})^{-1}$.

С другой стороны, можно получить косвенные ограничения на относительные вероятности (27), используя ограничения на матричные элементы (18), следующие из экспериментальных данных по другим процессам.

Наиболее жесткое ограничение к настоящему времени получено из экспериментов по $0\nu\beta\beta$ -распаду ядра ^{76}Ge [19]:

$$|\langle m_{ee}^{-1} \rangle| < (1.2 \times 10^8 \text{ ГэВ})^{-1}. \quad (32)$$

Из прецизионных измерений электрослабых процессов известны ограничения на параметры смешивания [20]:

$$\sum_N |U_{eN}|^2 < 6.6 \times 10^{-3}, \quad \sum_N |U_{\mu N}|^2 < 6.0 \times 10^{-3}, \quad (33)$$

а из экспериментов по поиску тяжелых нейтральных лептонов майорановского типа получено следующее ограничение снизу на их массу (для

случая взаимодействия с мюонами) [4]:

$$m_N > 90.7 \text{ ГэВ}. \quad (34)$$

Предположим, что основной вклад в (18) дает лишь одно тяжелое нейтрино с наименьшей массой. Тогда из (33) и (34) находим ограничения

$$|\langle m_{\mu\mu}^{-1} \rangle| < (1.5 \times 10^4 \text{ ГэВ})^{-1}, \quad |\langle m_{e\mu}^{-1} \rangle| < (1.4 \times 10^4 \text{ ГэВ})^{-1}. \quad (35)$$

Из (28), (32), (35) с учетом значений $C_{\ell\ell'}$ (третий столбец табл. 1) находим косвенные верхние границы относительных вероятностей (27), которые приведены в четвертом столбце табл. 1. Как видно, косвенные ограничения на много порядков жестче прямых экспериментальных (второй столбец), что означает слабость последних и подтверждает уже отмеченную невозможность получить в настоящее время прямые ограничения на обратные эффективные массы (см. (30)).

В заключение раздела сравним один из наших результатов для распада $K^+ \rightarrow \pi^- \mu^+ \mu^+$ (см. (28) и табл. 1),

$$C_{\mu\mu} = 2.4 \times 10^{-10} \text{ МэВ}^2, \quad (36)$$

с найденными (для того же распада) в работе [18]. В предположении, что основной вклад в процесс дает только одно тяжелое нейтрино, авторы вычислили отношение $\tilde{\Gamma} = \Gamma / |U_{\mu N}|^4$ для различных значений m_N . Используя найденные ими значения $\tilde{\Gamma}$ при $m_N = 1, 250, 500, 750 \text{ ГэВ}$, получаем для аналога нашей величины (36)

$$\tilde{C}_{\mu\mu} = m_N^2 \tilde{\Gamma} / \Gamma(K^+ \rightarrow \text{all}) = (2.4, 2.6, 2.6, 2.6) \times 10^{-10} \text{ МэВ}^2. \quad (37)$$

Полученные значения близки к (36), различаясь лишь на 8%.

4. Рассмотрим теперь случай легких нейтрино: $m_N \ll m_\ell, m_{\ell'}$. Тогда выражение (6) для лептонных тензоров можно упростить, пренебрегая m_N^2 в знаменателях нейтринных пропагаторов и, наоборот, оставляя

лишь m_W^2 в пропагаторах W -бозонов:

$$L_i^{\mu\nu} = 8G_F^2 \langle m_{\ell\ell'} \rangle \left(\overline{v^c}(p) \left[\frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{(p_i - p)^2} + \frac{\gamma^\nu \gamma^\mu}{(p_i - p')^2} \right] \frac{1 + \gamma^5}{2} v(p') \right), \quad (38)$$

где введена эффективная майорановская масса согласно

$$\langle m_{\ell\ell'} \rangle = \sum_N U_{\ell N} U_{\ell' N} \eta_N m_N. \quad (39)$$

Полную ширину распада (4) можно представить в виде суммы вкладов t - и b -диаграмм и их интерференции:

$$\Gamma = \Gamma_t + \Gamma_b + \Gamma_{tb}. \quad (40)$$

Для t -диаграммы ($i = t$ в (38)) $p_t = P - 4$ -импульс начального мезона (см. (7)), и лептонный тензор оказывается независящим от импульсных переменных БС-амплитуд. Поэтому вклад Γ_t в ширину распада (40) выражается только через константы распада мезонов и не зависит от явного вида БС-амплитуд (см. (5), (8) и (13)) [7]:

$$\Gamma_t = \frac{G_F^4 m_M^3}{16\pi^3} f_M^2 f_{M'}^2 |V_{12} V_{43}|^2 |\langle m_{\ell\ell'} \rangle|^2 \phi_{\ell\ell'}. \quad (41)$$

Здесь приведенный фазовый интеграл $\phi_{\ell\ell'}$ имеет довольно сложный вид, но в реалистическом пределе безмассовых лептонов (точнее, $m_\ell/m_M \rightarrow 0$ и $m_{\ell'}/m_M \rightarrow 0$) сводится к элементарной функции единственного безразмерного массового параметра z_3 (см. (26)):

$$\begin{aligned} \phi_{\ell\ell'} &\simeq \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{\ell\ell'} \right) \varphi(z_3); \quad \varphi(z_3) = \int_0^{z_1} dz z [(z_1 - z)(z_2 - z)]^{1/2} = \\ &= (1 - z_3) \left[2z_3 + \frac{1}{6} (1 - z_3)^2 \right] + z_3 (1 + z_3) \ln z_3. \end{aligned} \quad (42)$$

Для случая тождественных лептонов ($\ell' = \ell$) и ненулевой лептонной

массы фазовый интеграл имеет вид

$$\begin{aligned}
\phi_{\ell\ell} &= \frac{1}{2} \int_{4z_0}^{z_1} dz f_1 [z + 2z_0 (g_1 f_2 + g_2 f_3)]; \\
f_1 &= \left[\left(1 - \frac{4z_0}{z} \right) (z_1 - z) (z_2 - z) \right]^{1/2}, \\
f_2 &= (f_0^2 - f_1^2)^{-1}, \quad f_3 = \frac{1}{2f_0 f_1} \ln \frac{f_0 + f_1}{f_0 - f_1}, \\
f_0 &= 1 + z_3 + 2z_0 - z; \\
g_1 &= z_0 z - 2z_3, \quad g_2 = z^2 - 3z_0 z - 1 - z_3^2. \tag{43}
\end{aligned}$$

Здесь массовые параметры z_k те же, что и в (26). В пределе $z_0 \rightarrow 0$ из (43) получаем формулу (42), как и должно быть.

В рассматриваемом случае легких нейтрино определим отношения, аналогичные (28):

$$c_{\ell\ell'} = \frac{B_{\ell\ell'}}{|\langle m_{\ell\ell'} \rangle|^2} = c_t + c_b + c_{tb}, \tag{44}$$

где отдельные вклады c_n соответствуют разбиению (40).

Результаты численного расчета по формуле (41) вклада c_t представлены во второй колонке табл. 2 (для тех же мезонных распадов, что и в табл. 1).

Рассмотрим вклад b -диаграммы (см. рис. 1) Γ_b в ширину распада. В этом случае 4-импульс виртуального нейтрино зависит от относительных 4-импульсов q и q' кварка и антикварка в начальном и конечном мезонах (см. (7)), т. е. определяется формой БС-амплитуд. Нетривиальное интегрирование по q и q' в (16) проводится с использованием известного представления Фока–Швингера для пропагатора

$$(\Delta + i0)^{-1} = -i \int_0^\infty ds \exp [is (\Delta + i0)].$$

Для выбранной модели БС-амплитуд (см. (11)) получаем стандартные гауссовые интегралы, которые точно вычисляются, и для амплитуды (16) находим представление в виде однократного интеграла. Подстановка его в (4) приводит к выражению Γ_b в виде 11-кратного интеграла, который после учета закона сохранения 4-импульса и тривиального интегрирования по одной из угловых переменных удается свести к 6-кратному. Приведем результат для случая тождественных лептонов:

$$\Gamma_b = \frac{G_F^4}{2\pi^8} (V_{13}V_{24})^2 m_M^3 m_{M'}^4 (\delta_M \delta_{M'})^2 \left(\frac{a\alpha^2}{1+a} \right)^2 |\langle m_{\ell\ell} \rangle|^2 \phi_b. \quad (45)$$

Здесь фазовый интеграл

$$\begin{aligned} \phi_b = & \int_0^\pi d\theta \int_0^{y_0} dy \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dt \int_0^1 du \int_0^1 du' \left[(1+y^2) \frac{vv'}{uu'} \left(1 - \frac{4z_0}{z} \right) \right]^{1/2} \times \\ & \times y^2(z-2z_0)[(1+ss')\cos\psi - (s-s')\sin\psi] \times \\ & \times \exp[-A(z-4z_0)(F+F')] , \end{aligned} \quad (46)$$

где функции

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{u}{1-u} \right)^{1/2}, \quad v = (1+ab^2uy^2)^{-1}, \quad z = 1+z_3 - 2[z_3(1+y^2)]^{1/2}; \\ F &= bu + (1-bu)(1-v) \left[xt + \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)} \cos\theta \right]^2, \\ \psi &= A(z-4z_0)(H-H'), \\ H &= b\sqrt{u(1-u)} [1-b^{-2}(1-v)] , \end{aligned} \quad (47)$$

аналогичные функции, отмеченные штрихом, получаются из указанных заменой переменной u на u' . Введены также параметры

$$A = \left(\frac{m_M}{4\alpha} \right)^2, \quad a = \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2, \quad b = \frac{2}{1+a}, \quad y_0 = \left[\frac{(1+z_3-4z_0)^2}{4z_3} - 1 \right]^{1/2}, \quad (48)$$

где z_k определены в (26); α и δ_M параметризуют БС-амплитуду начального мезона (см. (9), (11) и (14)), аналогичные величины со штрихом относятся к конечному мезону.

Для вклада интерференции t - и b -амплитуд получаем (при $\ell = \ell'$) выражение в виде 5-кратного интеграла:

$$\Gamma_{tb} = -\frac{G_F^4}{4\pi^6} V_{12} V_{43} V_{13} V_{24} m_M^2 m_{M'}^3 f_M f_{M'} \delta_M \delta_{M'} \frac{a\alpha^2}{1+a} |\langle m_{\ell\ell} \rangle|^2 \phi_{tb}, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{tb} = & \int_0^\pi d\theta \int_0^{y_0} dy \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dt \int_0^1 du \left[\frac{v}{u} \left(1 - \frac{4z_0}{z} \right) \right]^{1/2} y^2 (s \cos \psi + \sin \psi) \times \\ & \times \left[z + \frac{w(\bar{z}(z-2z_0) - zw)}{w^2 - z_3(z-4z_0)y^2 T^2} \right] \exp[-A(z-4z_0)F]. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{2}(1+z_3-z), \quad w = z_3 + z_0 + \bar{z}\sqrt{z}, \\ T &= xt + \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)} \cos \theta, \end{aligned}$$

а остальные обозначения те же, что и в (47), (48).

Численный расчет многомерных интегралов (46) и (50) был выполнен с использованием программы VEGAS [21], основанной на алгоритме Монте-Карло. Соответствующие интегралы для распадов при $\ell \neq \ell'$ вычислены в приближении безмассовых лептонов (для этого в (46) и (50) надо ввести коэффициент 2 и положить параметр $z_0 = 0$). Для токовых масс夸克ов, определяющих параметр (10) БС-амплитуды мезона, выбраны следующие значения [16, 22]:

$$m_u = 4 \text{ МэВ}, \quad m_d = 7 \text{ МэВ}, \quad m_s = 150 \text{ МэВ}, \quad m_c = 1.26 \text{ ГэВ}. \quad (51)$$

Результаты расчета нормированных согласно (44) вкладов c_b и c_{tb} в относительные вероятности редких распадов (20), (3) и полной суммы

$c_{\ell\ell'}$ (см. (44)) приведены в табл. 2. Как видно, для K -распадов имеет место деструктивная интерференция t - и b -амплитуд, а для D -распадов — конструктивная, что объясняется различием знаков соответствующих элементов матрицы кваркового смешивания (см. (21), (29) и (49)).

Таблица 2. Вклады t - и b -амплитуд, их интерференции, полный вклад и косвенные ограничения сверху на относительные вероятности $B_{\ell\ell'}$ редких распадов мезонов $M^+ \rightarrow M'^-\ell^+\ell'^+$, обусловленных обменом легкими майорановскими нейтрино ($m_N \ll m_\ell, m_{\ell'}$)

Редкий распад	c_t [МэВ $^{-2}$]	c_b [МэВ $^{-2}$]	c_{tb} [МэВ $^{-2}$]	$c_{\ell\ell'}$ [МэВ $^{-2}$]	Косв. огран. на $B_{\ell\ell'}$
$K^+ \rightarrow \pi^- e^+ e^+$	5.3×10^{-20}	3.6×10^{-22}	-8.8×10^{-21}	4.4×10^{-20}	2.3×10^{-33}
$K^+ \rightarrow \pi^- \mu^+ \mu^+$	1.4×10^{-20}	1.2×10^{-22}	-2.1×10^{-21}	1.2×10^{-20}	6.2×10^{-34}
$K^+ \rightarrow \pi^- e^+ \mu^+$	1.1×10^{-19}	7.2×10^{-22}	-1.8×10^{-20}	8.8×10^{-20}	2.0×10^{-33}
$D^+ \rightarrow K^- e^+ e^+$	4.1×10^{-23}	3.6×10^{-21}	8.5×10^{-22}	4.5×10^{-21}	2.4×10^{-34}
$D^+ \rightarrow K^- \mu^+ \mu^+$	4.0×10^{-23}	3.3×10^{-21}	7.6×10^{-22}	4.1×10^{-21}	2.2×10^{-34}
$D^+ \rightarrow K^- e^+ \mu^+$	8.2×10^{-23}	7.3×10^{-21}	1.7×10^{-21}	9.1×10^{-21}	2.0×10^{-34}

Кроме того, для K -распадов доминирует t -амплитуда процесса, а для D -распадов — b -амплитуда, так как имеется кабибровское подавление t -амплитуды (см. (29)).

Как и для случая тяжелых нейтрино, существующие экспериментальные ограничения на относительные вероятности рассматриваемых распадов не позволяют получить прямые ограничения на эффективные майорановские массы (39). Действительно, для верхних границ из (44) с учетом численных результатов, приведенных в табл. 1 и 2, получаем значения, лежащие вне физической области:

$$|\langle m_{\ell\ell'} \rangle|_{\text{exp}} = (B_{\ell\ell'}^{\text{exp}} / c_{\ell\ell'})^{1/2} \gg m_\ell, m_{\ell'}. \quad (52)$$

Так, из ограничения на распад $K^+ \rightarrow \pi^- e^+ \mu^+$ следует $|\langle m_{e\mu} \rangle|_{\text{exp}} = 73$ ГэВ.

Найдем косвенные ограничения на относительные вероятности (27) в рассматриваемом случае легких нейтрино. Из экспериментов по $0\nu\beta\beta$ -распаду получено [19]:

$$|\langle m_{ee} \rangle| < 0.51 \text{ эВ.} \quad (53)$$

Из космологических данных и экспериментов по нейтринным осцилляциям в предположении, что существуют только три легких массовых нейтринных состояния ($m_1 < m_2 < m_3$), следует ограничение на наибольшую массу [4]:

$$m_3 < 0.23 \text{ эВ.} \quad (54)$$

Отсюда и из (39) с учетом обусловленного унитарностью матрицы лептонного смешивания соотношения $\sum_i |U_{\ell i}|^2 = 1$ находим ограничение для диагональных элементов матрицы эффективных майорановских масс:

$$|\langle m_{\ell\ell} \rangle| < 0.23 \text{ эВ,} \quad (55)$$

которое несколько жестче (53). Используя наилучший фит для матрицы смешивания из данных по нейтринным осцилляциям [2]:

$$U_{\text{bf}} = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.55 & 0.00 \\ -0.39 & 0.59 & 0.71 \\ 0.39 & -0.59 & 0.71 \end{pmatrix},$$

из (39) и (54) получаем ограничение на недиагональный элемент:

$$|\langle m_{e\mu} \rangle| < 0.15 \text{ эВ.} \quad (56)$$

Учитывая (44), (55), (56), а также вычисленные значения $c_{\ell\ell'}$ (см. табл. 2), находим косвенные верхние границы относительных вероятностей редких распадов, приведенные в последнем столбце табл. 2. Эти ограничения сильнее, чем в случае тяжелых нейтрино, и гораздо жестче прямых экспериментальных (см. табл. 1).

Сравним наш результат для распада $K^+ \rightarrow \pi^- \mu^+ \mu^+$ (см. (44) и табл. 2),

$$c_{\mu\mu} = 1.2 \times 10^{-20} \text{ МэВ}^{-2}, \quad (57)$$

с соответствующими результатами работы [18]. Для аналога величины (57) (ср. (37)) по результатам [18] находим следующие значения:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{\mu\mu} &= \frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^- \mu^+ \mu^+)}{|U_{\mu N}|^4 m_N^2 \Gamma(K^+ \rightarrow \text{all})} = \\ &= (1.2, 1.2, 1.2, 1.2, 0.75) \times 10^{-20} \text{ МэВ}^{-2}\end{aligned}\quad (58)$$

при

$$m_N = 10^{-6}, 5 \times 10^{-4}, 0.25, 1, 500 \text{ МэВ}$$

соответственно. Видно, что результаты (57) и (58) хорошо согласуются друг с другом. Это подтверждается также сравнением результатов [18] для относительного вклада t -амплитуды в полную ширину распада (при указанных выше значениях m_N):

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\mu}/\tilde{\Gamma}_t = 0.85, 0.85, 0.85, 0.85, 1.00 \quad (59)$$

с нашим результатом:

$$\Gamma_{\mu\mu}/\Gamma_t = c_{\mu\mu}/c_t = 0.86. \quad (60)$$

Сравним еще наш результат (57) с результатами более ранней работы [23], в которой использована та же модель мезонной БС-амплитуды [13], что и в настоящей работе (см. (9)). Соответствующее нашему (57) отношение

$$\hat{c}_{\mu\mu} = \frac{B_{\mu\mu}}{m_N^2} = (0.83, 0.85, 0.85, 0.84, 1.1) \times 10^{-20} \text{ МэВ}^{-2}$$

при

$$m_N = 1.5 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-5}, 10^{-4}, 5 \times 10^{-2}, 130 \text{ МэВ}.$$

Эти результаты хуже согласуются с (57): различие достигает 30 %. Кроме того, конструктивная интерференция t - и b -амплитуд, следующая из результатов [23], $\hat{\Gamma}_{\mu\mu}/\hat{\Gamma}_t = 1.6 \div 1.7$, противоречит найденной в случае

относительно малых нейтринных масс в [18] и подтвержденной нами деструктивной интерференции (ср. (59) и (60)).

Наконец, отметим справедливость оценки кабибовски подавленных вероятностей D -распадов (3), полученной в [7] на основе предположения, что приведенные t - и b -амплитуды процессов (с удаленными факторами V_{jk} и $1/N_c$, см. (8)) совпадают по порядку величины. Это дает следующее выражение для приведенных вероятностей (44) через модельно независимые величины c_t :

$$c_{\ell\ell'} \sim D c_t, \quad D = \left[1 + \frac{1}{N_c} \left| \frac{V_{13} V_{42}}{V_{12} V_{43}} \right| \right]^2,$$

где поправочный фактор $D \simeq 57$ (см. (29)). Используя значения модельно независимых величин c_t для D -распадов из второго столбца табл. 2, получаем оценки:

$$(c_{ee}, c_{\mu\mu}, c_{e\mu}) \sim (2, 2, 5) \times 10^{-21} \text{ МэВ}^{-2},$$

которые с точностью около 50% согласуются с рассчитанными (см. пятый столбец табл. 2).

5. Мы рассмотрели редкие распады мезонов $K^+ \rightarrow \pi^- \ell^+ \ell'^+$ и $D^+ \rightarrow K^- \ell^+ \ell'^+$ с несохранением лептонного числа, вызванные обменом майорановскими нейтрино. Структура мезонов была учтена в рамках сравнительно простой гауссовой модели для амплитуд Бете–Солпитера. Амплитуда распада представляется в виде суммы двух вкладов, первый из которых A_t оказывается модельно независимым и выражается через константы распада начального и конечного мезонов, второй же вклад A_b в общем случае определяется формой мезонных БС-амплитуд и содержит цветовой фактор подавления $1/N_c$. Исследованы случаи тяжелых и легких нейтрино.

Подтверждены уже известные результаты: для тяжелых нейтрино не только A_t , но и A_b не зависит от структуры мезонов; для легких нейтрино основной вклад в вероятности редких K -распадов дает A_t .

Полученные нами численные результаты для распада $K^+ \rightarrow \pi^- \mu^+ \mu^+$ в широкой области значений нейтринных масс хорошо согласуются с аналогичными результатами недавней работы [18], в которой использована более сложная модель БС-амплитуд.

Для редких D -распадов имеется двойное кабибовское подавление вклада A_t , и учет структурных эффектов в случае легких нейтрино принципиально необходим. Численные расчеты подтвердили справедливость оценок этих эффектов, сделанных ранее в [7].

Показано, что современные прямые экспериментальные ограничения на относительные вероятности рассмотренных редких мезонных распадов слишком слабы, чтобы установить реальные ограничения на эффективные майорановские массы. Используя полученные к настоящему времени ограничения на параметры лептонного смешивания и массы нейтрино из прецизионных измерений электрослабых процессов, экспериментов по нейтринным осцилляциям, поиску безнейтринного двойного бета-распада ядер и космологических данных, мы нашли ограничения на эффективные массы нейтрино и установили косвенные верхние граници вероятностей редких распадов. Они лежат значительно ниже прямых экспериментальных границ.

Авторы благодарят Д. В. Перегудова и П. К. Сенаторова за помощь в проведении численных расчетов и А. Е. Лобанова — за обсуждение результатов.

Список литературы

1. С. М. Биленький, УФН **173**, 1171 (2003).
2. C. Giunti and M. Laveder, in *Developments in Quantum Physics*, Ed. by F. Columbus and V. Krasnoholovets (Nova Science Publishers, Hauppauge, N.Y., 2004), p. 197 [hep-ph/0310238].
3. Ф. Боум, П. Фогель, *Физика массивных нейтрино* (Мир, Москва, 1990).
4. Particle Data Group Collab.: S. Eidelman *et al.*, Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).
5. A. Yu. Smirnov, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 1180 (2004) [hep-ph/0311259].
6. H. V. Klapdor-Kleingrothaus, I. V. Krivosheina, A. Dietz, and O. Chkvorets, Phys. Lett. B **586**, 198 (2004) [hep-ph/0404088].
7. A. Ali, A. V. Borisov, and N. B. Zamorin, Eur. Phys. J. C **21**, 123 (2001) [hep-ph/0104123].
8. A. Ali, A. V. Borisov, and N. B. Zamorin, in *Proceedings of the Tenth Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics “Frontiers of Particle Physics”, Moscow, 23-29 August 2001*, Ed. by A. I. Studenikin (World Scientific, Singapore, 2003), p. 74.
9. O. Panella, M. Cannoni, C. Carimalo, and Y. N. Srivastava, Phys. Rev. D **65**, 035005 (2002).
10. M. Flanz, W. Rodejohann, and K. Zuber, Phys. Lett. B **473**, 324 (2000); **480**, 418(E) (2000); W. Rodejohann and K. Zuber, Phys. Rev. D **62**, 094017 (2000).
11. А. Али, А. В. Борисов, Д. В. Журидов, Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. №1, 15 (2004).

12. C. Dib, V. Gribanov, S. Kovalenko, and I. Schmidt, Phys. Lett. B **493**, 82 (2000).
13. G. Esteve, A. Morales, and R. Núñes-Lagos, J. Phys. G **9**, 357 (1983).
14. Z.-G. Wang, W.-M. Yang, and S.-L. Wan, Phys. Lett. B **615**, 79 (2005) [hep-ph/0411142].
15. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля* (Мир, Москва, 1984), т. 2.
16. М. Б. Волошин, К. А. Тер-Мартиросян, *Теория калиброповочных взаимодействий элементарных частиц* (Энергоатомиздат, Москва, 1984).
17. S. Aoki, Int. J. Mod. Phys. A **15**, No. supp01B, 657 (2000).
18. M. A. Ivanov and S. G. Kovalenko, Phys. Rev. D **71**, 053004 (2005) [hep-ph/0412198].
19. J. D. Vergados, Phys. Rep. **361**, 1 (2002); hep-ph/0409319.
20. E. Nardi, E. Roulet, and D. Tommasini, Phys. Lett. B **344**, 225 (1995).
21. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 90* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
22. Л. Б. Окунь, *Лептоны и кварки* (Наука, Москва, 1990).
23. J. Abad, J. G. Esteve, and A. F. Pacheco, Phys. Rev. D **30**, 1488 (1984).

MAJORANA NEUTRINOS IN RARE MESON DECAYS

A. Ali, A. V. Borisov, M. V. Sidorova

We discuss lepton-number violating rare meson decays $K^+ \rightarrow \pi^- \ell^+ \ell'^+$ and $D^+ \rightarrow K^- \ell^+ \ell'^+$ ($\ell, \ell' = e, \mu$) mediated by Majorana neutrinos. The effects of meson structure are taken into account in the framework of a Gaussian model for Bethe–Salpeter amplitudes. It is shown that the present direct experimental bounds on the branching ratios are too weak to set reasonable limits on the effective Majorana masses. On the basis of the limits on lepton mixing and neutrino masses obtained from the precision electroweak measurements, neutrino oscillation experiments, searches of the neutrinoless double beta decay and cosmological data, we derive the indirect upper bounds on the branching ratios that are greatly more stringent than the direct ones.