

6

DESY - Bibliothek

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON
DESY

Hamburg-Groß Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

Wochen

Desy-Notiz A 2.96

Hamburg, den 30. Januar 1963
E 2-Dr. Lu/VM

WIRKUNGSQUERSCHNITTE FÜR BREMSSTRAHLUNG UND PAARERZEUGUNG
BEI HOHEN ENERGIEN

Von D. Lublow

Summary

This paper gives a coherent survey of the differential and integral cross sections for bremsstrahlung and pair production at high energies. The formulas given can be used for estimating the thin target spectra from high energy accelerators and provide basic data for analyzing the thick target spectra and the development of cascade showers. The cross sections are given in three steps of approximation:

1. Born approximation for a pure Coulomb field

At high energies the Coulomb field is a poor approximation because screening always must be taken into account. Moreover, for heavy elements the Born approximation is not very reliable, and Coulomb corrections become important. The formulas of this section are of no use for applications but serve as a starting point of the corrections given in sections 2 and 3.

2. Screening corrections

The screening effect of the atomic electrons was treated numerically by Bethe and Heitler using the tabulated form factor of the Thomas-Fermi atomic model. The integrations over the emission angles yield simple analytical formulas in the limiting cases of "no screening" and "complete screening" only. In between, for "intermediate screening", the cross sections for bremsstrahlung and pair production are written in terms of the functions $\phi_1(\gamma)$, $\phi_2(\gamma)$, and $c(\gamma)$ which are presented

graphically. As to the cross sections differential in energy and one of the emission angles, no formulas at all can be given.

For bremsstrahlung analytical calculations were carried out by Schiff using an approximate "exponential screening potential" $V(r) = -\frac{Ze^2}{r} e^{-\alpha r}$, where α is an adjusted parameter. For most purposes Schiff's formulas are sufficiently accurate. The cross section differential in photon energy and angle is relatively simple and has been used extensively for estimating the thin target spectrum shape.

In Schiff's paper the formulas are quoted without derivation. In this paper a derivation suggested by Olsen and Maximon is used in which screening appears as a correction to the cross section for a pure Coulomb field. The formulation is extended to pair production.

Moreover, Schiff's exponential screening form factor is generalized by introducing a second parameter which gives full agreement with the Bethe-Heitler formulas.

3. Coulomb corrections

The Coulomb corrections were calculated in a series of papers by Bethe, Maximon, Olsen et al. by replacing the plane waves of the Born approximation by Sommerfeld-Maue wave functions. In contrast to the Born approximation there are essential differences between the differential cross sections for bremsstrahlung and pair production. These are due to the asymptotic behavior of the wave functions. For bremsstrahlung, the small momentum transfers to the nucleus are modified by Coulomb corrections, while in the case of pair production the large momentum transfers are modified.

As screening affects small momentum transfers in either case, screening and Coulomb corrections can be dealt with separately in pair production. As to bremsstrahlung, both corrections must be taken into account simultaneously, and the outcome is a rather complicated formula. Fortunately, this applies only to the differential cross section. After integration over the electron emission angle, screening and Coulomb corrections are independent for bremsstrahlung also. Furthermore, the correspondence between bremsstrahlung and pair production cross sections is reestablished.

For bremsstrahlung the integration of the differential cross section is straightforward. In pair production, however, the momentum transfer distribution cannot be handled without approximations. This requires separate integrations over small and large momentum transfers. The result is completely analogous to the corresponding bremsstrahlung cross section. The final formulas given in this section contain both screening and Coulomb corrections.

Finally, a correction must be applied for the bremsstrahlung and pair production processes which occur in the field of the atomic electrons. The exact treatment of these processes is of outstanding complexity. As to the differential cross sections, only rough estimates exist, and the formulas are quite involved and will not be given here. In the total cross sections the effect of the atomic electrons can be included approximately by replacing Z^2 by $Z(Z + 1)$.

Conditions of validity

The Born approximation requires high enough energies, and the Sommerfeld-Maue wave functions are suited for extreme relativistic energies only; therefore we assume throughout this paper

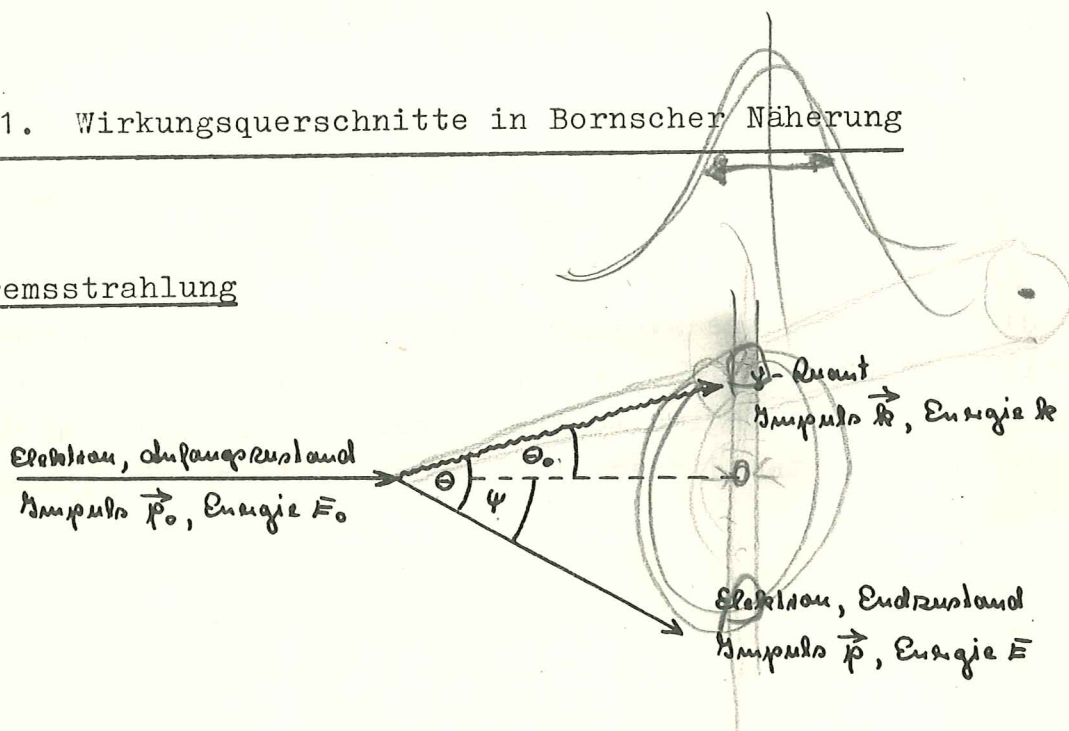
$$\begin{array}{l} E_0, E, k \gg mc^2 \\ k, E_1, E_2 \gg mc^2 \end{array}$$

for bremsstrahlung,
for pair production.

At high energies the average emission angles are extremely small, and the small angle approximation is used. The contributions from large angles to the integral cross sections can be neglected, but the differential cross sections are not valid for angles $> 5^\circ$.

1. Wirkungsquerschnitte in Bornscher Näherung

a) Bremsstrahlung



Es gelten der Energie- und der Impulssatz

$$(1a.1) \quad k = E_0 - E, \quad \vec{q} = \vec{p}_0 - \vec{p} - \vec{k}.$$

$\vec{q}$ ist der ans Atom übertragene Rückstoßimpuls. Das Atom wird als unendlich schwer angenommen, so daß es keine kinetische Energie aufnimmt^{*)}.

ϕ sei der Winkel zwischen den Ebenen $(\vec{p}_0, \vec{k})$ und $(\vec{p}, \vec{k})$.
Dann ist

$$\cos \psi = \cos \Theta_0 \cos \Theta + \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos \phi,$$

$$d\Omega_p = \sin \Theta d\Theta d\phi, \quad d\Omega_k = 2\pi \sin \Theta d\Theta.$$

Einheiten: Es wird $m = c = \hbar = 1$ gesetzt, d. h. es wird gemessen

Energie in $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$, Impuls in $mc = 0,511 \text{ MeV}/c$,

Länge in $\lambda_0 = \hbar/mc = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$.

^{*)} Auch bei endlicher Masse des Atoms, $M < \infty$, kann die mit dem Rückstoß übertragene Energie in sehr guter Näherung vernachlässigt werden. Größenordnungsmäßig ist $E_{\text{kin}} \approx q^2/2M$. Wie noch gezeigt wird, ist $q \approx 1$. Mit $M \approx 1840 \cdot \text{Atomgewicht}$ wird $E_{\text{kin}} \ll 1 \ll E_0$.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist (Bethe-Heitler-Formel)

(1a.2)

$$d\sigma_{K, \Theta_0, \Theta, \phi} = \frac{\bar{\phi}}{(2\pi)^2} \frac{p}{p_0} \frac{dk}{k} \frac{[1 - F(q, Z)]^2}{q^4} d\Omega_p d\Omega_k$$

$$\left\{ \frac{p_0^2 \sin^2 \Theta_0}{(E_0 - p_0 \cos \Theta_0)^2} (4E^2 - q^2) + \frac{p^2 \sin^2 \Theta}{(E - p \cos \Theta)^2} (4E_0^2 - q^2) \right.$$

$$\left. - \frac{2 p_0 p \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos \phi (4E_0 E - q^2 + 2k^2) - 2k^2 (p_0^2 \sin^2 \Theta_0 + p^2 \sin^2 \Theta)}{(E_0 - p_0 \cos \Theta_0)(E - p \cos \Theta)} \right\}.$$

Dabei ist $\bar{\phi} = \frac{1}{2} \frac{Z^2 r_0^2}{137}$, Z = Kernladungszahl, r_0 = klassischer Elektronenradius = $2,82 \cdot 10^{-13}$ cm und

$$(1a.3) \quad q^2 = p_0^2 + p^2 + k^2 - 2p_0 k \cos \Theta_0 + 2p k \cos \Theta - 2p_0 p (\cos \Theta_0 \cos \Theta + \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos \phi).$$

Der Atomformfaktor $F(q, Z)$ berücksichtigt die Abschirmung durch die Elektronenhülle. Wir lassen die Abschirmung zunächst weg: $F(q, Z) = 0$.

Die Bornsche Näherung setzt voraus, daß

$$(1a.4) \quad \frac{2\pi Z}{137 \beta_0} \ll 1, \quad \frac{2\pi Z}{137 \beta} \ll 1$$

ist ($\beta = v/c = p/E$). Bei schweren Atomen ist diese Forderung nicht erfüllt (für Blei ist $\frac{2\pi Z}{137} = 3,8$); hier muß die Coulomb-Korrektur berücksichtigt werden.

Für extrem relativistische Anfangsenergien ist $\beta_0 \approx 1$. Nach (1a.4) darf auch β nicht allzu klein werden. Dies ist der Fall, wenn das Lichtquant nahezu die ganze kinetische Energie des Elektrons übernimmt. Wir setzen $E_0 > E \gg 1$ voraus. Alle im folgenden angegebenen Gleichungen gelten nicht an der hochenergetischen Kante des Spektrums, wo $E \rightarrow 1$ geht.

Näherung für hohe Energien

Bei hohen Energien gehen Elektron und Lichtquant nahezu in Vorwärtsrichtung; die mittleren Winkel Θ_0 und Θ sind von der Größenordnung $1/E_0$.

Mit

$$E^2 = p^2 + 1, \quad p = E \sqrt{1 - \frac{1}{E^2}} \approx E \left(1 - \frac{1}{2E^2}\right),$$

$$\sin \Theta \approx \Theta, \quad \cos \Theta \approx 1 - \frac{\Theta^2}{2}, \quad E - p \cos \Theta \approx \frac{1}{2E} (1 + E^2 \Theta^2)$$

und Vernachlässigung des q^2 *) in den (.....) wird die {.....} in Gl. (1a.2)

$$\{.....\} = 16 E_0^2 E^2 \left[\frac{E_0^2 \Theta_0^2}{(1 + E_0^2 \Theta_0^2)^2} + \frac{E^2 \Theta^2}{(1 + E^2 \Theta^2)^2} \right]$$

$$- 8 E_0 E \frac{2 E_0 E \Theta_0 \Theta \cos \phi (2 E_0 E + k^2) - k^2 (E_0^2 \Theta_0^2 + E^2 \Theta^2)}{(1 + E_0^2 \Theta_0^2)(1 + E^2 \Theta^2)}.$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$(1a.5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E_0 \Theta_0 = \mu, & E \Theta = \nu, & 0 \leq \mu, \nu \leq \infty, \quad ** \\ \frac{1}{1 + \mu^2} = \xi, & \frac{1}{1 + \nu^2} = \eta, & 0 \leq \xi, \eta \leq 1, \\ \frac{E}{E_0} = \varepsilon, & & \frac{1}{E_0} \leq \varepsilon \leq 1. \quad *** \end{array} \right.$$

Hiermit wird, wenn wir noch $2E_0 E + k^2 = E_0^2 + E^2$ und $k^2 = (E_0 - E)^2$ einsetzen,

$$(1a.6) \quad d\mathcal{Q}_{k,\mu,\nu,\phi} = \frac{8\bar{\phi}}{2\pi} \frac{dk}{k} \frac{\mu d\mu \nu d\nu d\phi}{q^4}$$

$$\left\{ 2\varepsilon (\mu^2 \xi^2 + \nu^2 \eta^2) - \xi \eta [2(1 + \varepsilon^2) \mu \nu \cos \phi - (1 - \varepsilon)^2 (\mu^2 + \nu^2)] \right\}.$$

*) Wie noch gezeigt wird, ist $q = O(1)$ und kann neben $E_0, E \gg 1$ vernachlässigt werden.

**) Für große u ist nach Gl. (1a.6) $d\mathcal{Q} \sim \frac{\mu^3 \xi}{q^4} \approx \mu^{-3}$. Dasselbe gilt für ν . Obwohl $u \leq E_0 \pi$, $\nu \leq E \pi$ sein muß, kann bis $u, \nu \leq \infty$ integriert werden; denn nur $u, \nu = O(1)$ liefern wesentliche Beiträge zu $d\mathcal{Q}$. Vergl. hierzu Fig. 5 und 6.

***) Es kann nur die kinetische Energie des Elektrons ausgestrahlt werden: $1 \leq E \leq E_0$.

Wir zerlegen den Rückstoßimpuls $\vec{q}$ in

$$\vec{q} = \vec{q}_\perp + \vec{q}_\parallel, \quad \left\{ \begin{array}{l} \parallel = \text{Komponente in } k\text{-Richtung} \\ \perp = \text{Komponente senkrecht zur } k\text{-Richtung} \end{array} \right.$$

Es ist

$$(1a.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_\perp^2 = p_0^2 \sin^2 \Theta_0 + p^2 \sin^2 \Theta - 2 p_0 p \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos \phi \\ \quad \approx \mu^2 + \nu^2 - 2 \mu \nu \cos \phi, \\ q_\parallel = p_0 \cos \Theta_0 - p \cos \Theta - R \\ \quad \approx -\frac{1+\mu^2}{2E_0} + \frac{1+\nu^2}{2E} = \frac{E_0 \xi - E \eta}{2E_0 E \xi \eta}, \\ \delta \equiv q_{\min} = q_{\parallel \min} = p_0 - p - R \approx \frac{R}{2E_0 E} = O\left(\frac{1}{E}\right) \ll 1. \end{array} \right. \quad \times$$

Für $\phi \neq 0$ ist mit $u, v = O(1)$ auch $q_\perp = O(1)$. Wegen $q_\parallel = O\left(\frac{1}{E}\right) \ll 1$ kann dann $q^2 \approx q_\perp^2$ gesetzt werden. Für $\phi \approx 0$ und $u \approx v$ wird $q_\perp^2 \approx 0$. In diesem Fall ist wegen

$$q_\parallel \approx \frac{E_0 \xi - E \eta}{2E_0 E \xi \eta} \approx \frac{\delta}{\xi \eta},$$

so daß für beide Fälle die Gleichung

$$(1a.8) \quad q^2 = q_\perp^2 + \frac{\delta^2}{\xi \eta}$$

gilt.

Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Zur Integration führen wir statt ϕ die Variable λ ein¹⁾:

$$(1a.9) \quad 2\xi\eta\mu\nu\cos\phi = \xi + \eta - 2\xi\eta - \lambda.$$

Es ist

$$(1a.10) \quad \lambda = q_\perp^2 \xi \eta, \quad \frac{1}{q^2} = \frac{\xi \eta}{\delta^2 + \lambda}.$$

Mit

$$d\phi = \frac{d\lambda}{\sqrt{-(\xi-\eta)^2 + 2\lambda(\xi+\eta-2\xi\eta) - \lambda^2}}$$

1) Olsen und Maximon, Phys. Rev. 114, 887 (1959).

und (1a.10) wird

$$(1a.11) \quad d\mathcal{Z}_{k,\xi,\eta,\mathcal{Z}} = \frac{4\bar{\phi}}{2\pi} \frac{dk}{k} \frac{[\mathcal{Z}(1+\varepsilon^2) - 2\varepsilon(\xi-\eta)^2] d\xi d\eta d\mathcal{Z}}{(\delta^2+\mathcal{Z})^2 \sqrt{-(\xi-\eta)^2 + 2\mathcal{Z}(\xi+\eta-2\xi\eta) - \mathcal{Z}^2}}.$$

Für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ ist $\frac{d\mathcal{Z}}{d\phi} = 0$. Dies liefert die Integrationsgrenzen für $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}_{1,2} = \mathcal{Z}_{1,2}(\xi, \eta) = \xi + \eta - 2\xi\eta \mp 2\sqrt{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}.$$

Für $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ wird das Intervall $\mathcal{Z}_1 \leq \mathcal{Z} \leq \mathcal{Z}_2$ noch einmal durchlaufen. Wir beschränken ϕ auf $0 \leq \phi \leq \pi$ und müssen dann das Integral verdoppeln; dies ist in dem Faktor 4 in Gl. (1a.11) bereits berücksichtigt.

Wir integrieren über alle Richtungen des abgebremsten Elektrons, u. z. zuerst über η , dann über $\mathcal{Z}$. Die Grenzen für η sind

$$\eta_{1,2} = \eta_{1,2}(\xi, \mathcal{Z}) = \xi + \mathcal{Z}(1-2\xi) \mp 2\sqrt{\xi(1-\xi)\mathcal{Z}(1-\mathcal{Z})}.$$

In (1a.11) treten die Integrale $\mathcal{H}_1 = \int \frac{d\eta}{\sqrt{\dots}}$ und $\mathcal{H}_2 = \int \frac{(\xi-\eta)^2 d\eta}{\sqrt{\dots}}$ auf. Es ist²⁾

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^m d\eta}{\sqrt{(\eta-\eta_1)(\eta_2-\eta)}} = (-1)^m \pi \sum_{\mu=0}^m \binom{-\frac{1}{2}}{\mu} \binom{-\frac{1}{2}}{m-\mu} \eta_1^\mu \eta_2^{m-\mu}.$$

Dies liefert

$$\mathcal{H}_1 = \pi, \quad \mathcal{H}_2 = \pi \mathcal{Z} \{ 2\xi(1-\xi) + \mathcal{Z}[1-6\xi(1-\xi)] \}$$

und

$$(1a.12) \quad d\mathcal{Z}_{k,\xi,\mathcal{Z}} = 2\bar{\phi} \frac{dk}{k} \left\{ \mathcal{Z}[1+\varepsilon^2 - 4\varepsilon\xi(1-\xi)] - 2\varepsilon\mathcal{Z}^2[1-6\xi(1-\xi)] \right\} \frac{d\mathcal{Z}d\xi}{(\delta^2+\mathcal{Z})^2}.$$

Die Integration über $\mathcal{Z}$, $0 \leq \mathcal{Z} \leq 1$, läßt sich leicht ausführen. Wir wollen aber an dieser Stelle noch weitere (hier unnötige und erst für die spätere Behandlung der Coulomb-Korrektur nützliche) Variable x und y einführen:

$$(1a.13) \quad y = \frac{\delta^2}{\delta^2+\mathcal{Z}} = \frac{\delta^2}{\xi\eta q^2} = \left(\frac{q_{\parallel}}{q}\right)^2, \quad \delta^2 \leq y \leq 1,$$

$$x = 1-y = \left(\frac{q_{\perp}}{q}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq 1-\delta^2.$$

2) Gröbner-Hofreiter, Integraltafel, II. Teil, 2. Aufl., S. 93.

Mit $\frac{2d\delta}{(\delta^2+2)^2} = \frac{x dx}{1-x}$ wird

$$(1a.14) \quad dZ_{R,\xi,x} = 2\bar{\phi} \frac{dk}{k} \left\{ 1 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon\xi(1-\xi) - \frac{2\varepsilon\delta^2 x}{1-x} [1 - 6\xi(1-\xi)] \right\} \frac{x dx}{1-x} d\xi.$$

Es ist

$$(1a.15) \quad \int_0^{1-\delta^2} \frac{x dx}{1-x} = -\log(1-x) - x \Big|_0^{1-\delta^2} = -\log \delta^2 - 1$$

und

$$(1a.16) \quad \delta^2 \int_0^{1-\delta^2} \frac{x^2 dx}{(1-x)^2} = \delta^2 \left\{ 2\log(1-x) + x - \frac{1}{1-x} \right\} \Big|_0^{1-\delta^2} = 1,$$

wobei in (1a.15) ein Glied $O(\delta^2)$ und in (1a.16) Glieder $O(\delta^2 \log \delta)$ und $O(\delta^4)$ vernachlässigt sind. Hiermit erhält man

$$(1a.17) \quad dZ_{R,\xi} = 2\bar{\phi} \frac{dk}{k} \left\{ 16\varepsilon\xi(1-\xi) - (1+\varepsilon)^2 - [1+\varepsilon^2 - 4\varepsilon\xi(1-\xi)] \log \delta^2 \right\} d\xi.$$

Mit dem u von Gl. (1a.5) kann dies als

$$(1a.18) \quad dZ_{R,\mu} = 4\bar{\phi} \frac{dk}{k} \left\{ 16\varepsilon\xi^2\mu^2 - (1+\varepsilon)^2 - [1+\varepsilon^2 - 4\varepsilon\xi^2\mu^2] \log \delta^2 \right\} \xi^2 \mu d\mu$$

geschrieben werden, in Übereinstimmung mit einer von Sommerfeld³⁾ angegebenen Gleichung.

Die Integration über die Richtungen des Lichtquant in (1a.17) ergibt mit $\int_0^1 \xi(1-\xi) d\xi = \frac{1}{6}$

$$(1a.19) \quad dZ_R = 2\bar{\phi} \frac{dk}{k} \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{2}{3}\varepsilon \right) (-\log \delta^2 - 1).$$

3) Atombau und Spektrallinien, Band II. S. 551.

Gesamter Strahlungsverlust

Wegen $d\mathcal{Z}_k \sim \frac{dk}{k}$ divergiert das Integral $\int d\mathcal{Z}_k$ an der unteren Grenze $k = 0$. Diese "Infrarot-Divergenz" ist eine Folge des bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts benutzten Näherungsverfahrens (Iterationslösung der S-Matrix, wobei nur die Glieder niedrigster Ordnung mitgenommen und die Strahlungskorrekturen vernachlässigt werden); sie verschwindet bei der Berücksichtigung höherer Näherungen.

Die mit dem Auftreten unendlich vieler Quanten der Energie $k \rightarrow 0$ verbundenen Schwierigkeiten werden vermieden, wenn man den Strahlungsverlust

$$(1a.20) \quad d\phi_{\text{Str.}} = \frac{k}{E_0} d\mathcal{Z}_k = \frac{4\bar{\phi}}{E_0} \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \left\{ \log \frac{2E_0 E}{k} - \frac{1}{2} \right\} dk$$

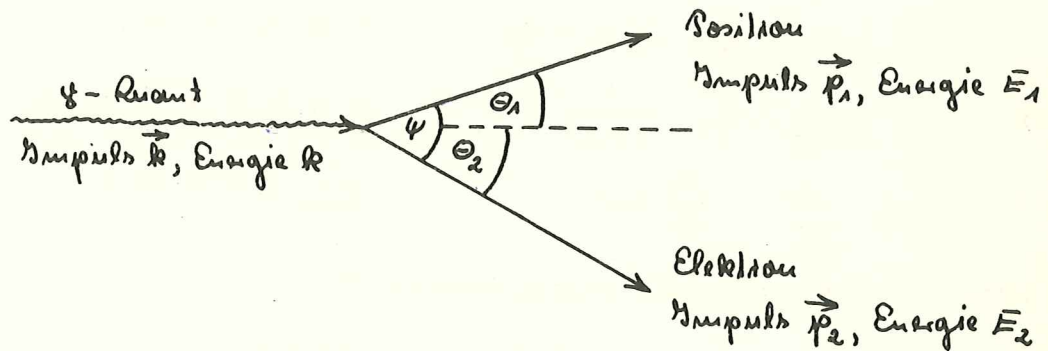
bildet. Mit $k = E_0(1 - \varepsilon)$ wird

$$\phi_{\text{Str.}} = 4\bar{\phi} \int_{1/E_0}^1 \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \left\{ \log \frac{2E_0 \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \frac{1}{2} \right\} d\varepsilon.$$

Die untere Grenze $1/E_0$ kann gleich Null gesetzt werden; dies liefert einen Fehler $O\left(\frac{\log E_0}{E_0}\right)$. Die Integration ergibt dann

$$(1a.21) \quad \phi_{\text{Str.}} = 4\bar{\phi} \left\{ \log 2E_0 - \frac{1}{3} \right\}.$$

b) Paarerzeugung



Die Behandlung der Bremsstrahlung lässt sich fast wörtlich auf die Paarerzeugung übertragen. Energie- und Impulssatz lauten

$$(1b.1) \quad k = E_1 + E_2, \quad \vec{q} = \vec{k} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2.$$

ϕ sei der Winkel zwischen den Ebenen $(\vec{p}_1, \vec{k})$ und $(\vec{p}_2, \vec{k})$. Es ist

$$\cos \psi = \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \phi,$$

$$d\Omega_1 = \sin \Theta_1 d\Theta_1 d\phi, \quad d\Omega_2 = 2\pi \sin \Theta_2 d\Theta_2.$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist

$$(1b.2) \quad d\sigma_{E_1, \Theta_1, \Theta_2, \phi} = -\frac{\bar{\psi}}{(2\pi)^2} \frac{p_1 p_2 dE_1}{k^3} \frac{[1 - F(q_1, k)]^2}{q^4} d\Omega_1 d\Omega_2$$

$$\left\{ \frac{p_1^2 \sin^2 \Theta_1}{(E_1 - p_1 \cos \Theta_1)^2} (4E_2^2 - q^2) + \frac{p_2^2 \sin^2 \Theta_2}{(E_2 - p_2 \cos \Theta_2)^2} (4E_1^2 - q^2) \right.$$

$$\left. + \frac{2 p_1 p_2 \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \phi (4E_1 E_2 + q^2 - 2k^2) - 2k^2 (p_1^2 \sin^2 \Theta_1 + p_2^2 \sin^2 \Theta_2)}{(E_1 - p_1 \cos \Theta_1)(E_2 - p_2 \cos \Theta_2)} \right\}$$

mit

$$(1b.3) \quad q^2 = k^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2k p_1 \cos \Theta_1 - 2k p_2 \cos \Theta_2 + 2 p_1 p_2 (\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \phi).$$

Die Bornsche Näherung setzt $\frac{2\pi\hbar^2}{137\beta_{1,2}} \ll 1$ voraus. Wir nehmen im folgenden stets $E_1 \gg 1$ und $E_2 \gg 1$ an.

Näherung für hohe Energien

Für hohe Energien sind die mittleren Winkel $\Theta_{1,2} = O(\frac{1}{R})$.
Mit denselben Näherungen wie bei der Bremsstrahlung und den
Abkürzungen

$$(1b.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E_1 \Theta_1 = \mu, & E_2 \Theta_2 = \nu, & 0 \leq \mu, \nu \leq \infty, \\ \frac{1}{1+\mu^2} = \xi, & \frac{1}{1+\nu^2} = \eta, & 0 \leq \xi, \eta \leq 1, \\ \frac{E_2}{E_1} = \alpha, & & \frac{1}{R-1} \leq \alpha \leq R-1 \end{array} \right.$$

wird (die Abschirmung ist weggelassen: $F(q, Z) = 0$)

$$(1b.5) \quad d\mathcal{B}_{E_1, \mu, \nu, \phi} = - \frac{g \bar{\phi}}{2\pi} \frac{E_1^2 dE_1}{R^3} \frac{\mu d\mu \nu d\nu d\phi}{q^4} \\ \left\{ 2\alpha(\mu^2 \xi^2 + \nu^2 \eta^2) - \xi \eta [2(1+\alpha^2) \mu \nu \cos \phi + (1+\alpha)^2 (\mu^2 + \nu^2)] \right\}.$$

Die Rückstoßimpulse sind ($\perp$ = senkrecht zur k-Richtung,
z = in k-Richtung)

$$(1b.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\perp}^2 = p_1^2 \sin^2 \Theta_1 + p_2^2 \sin^2 \Theta_2 + 2 p_1 p_2 \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \phi \\ \approx \mu^2 + \nu^2 + 2 \mu \nu \cos \phi, \\ q_{\parallel} = R - p_1 \cos \Theta_1 - p_2 \cos \Theta_2 \\ \approx \frac{1+\mu^2}{2E_1} + \frac{1+\nu^2}{2E_2} = \frac{E_1 \xi + E_2 \eta}{2E_1 E_2 \xi \eta} \quad (\approx \frac{\delta}{\sqrt{\xi \eta}} \text{ für } \xi \approx \eta), \\ \delta \equiv q_{\min} = q_{\parallel \min} = R - p_1 - p_2 \approx \frac{R}{2E_1 E_2} = O(\frac{1}{E_{1,2}}) \ll 1. \end{array} \right.$$

Entsprechend wie bei der Bremsstrahlung kann stets

$$(1b.7) \quad q^2 \approx q_{\perp}^2 + \frac{\delta^2}{\xi \eta}$$

gesetzt werden.

Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Statt ϕ wird durch

$$(1b.8) \quad -2\xi\eta\mu\nu\cos\phi = \xi + \eta - 2\xi\eta - 2$$

die Variable $\mathcal{Q}$ eingeführt. Wie bei der Bremsstrahlung ist

$$(1b.9) \quad \mathcal{Q} \approx q_{\perp}^2 \xi \eta, \quad \frac{1}{q^2} \approx \frac{\xi \eta}{\delta^2 + \mathcal{Q}}.$$

Die weitere Rechnung verläuft genau wie in 1a. Zunächst erhält man

$$(1b.10) \quad d\mathcal{Z}_{E_1, \xi, \eta, \mathcal{Z}} = \frac{4\bar{\phi}}{2\pi} \frac{E_1^2 dE_1}{R^3} \frac{[\mathcal{Z}(1+\alpha^2) + 2\alpha(\xi-\eta)^2] d\xi d\eta d\mathcal{Z}}{(\mathcal{Z}^2 + \mathcal{Z})^2 \sqrt{-(\xi-\eta)^2 + 2\mathcal{Z}(\xi+\eta - 2\xi\eta) - \mathcal{Z}^2}}.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie (1a.11); der einzige wesentliche Unterschied ist das Pluszeichen in der [...]. Zur Integration gehen wir wie in (1a.13) zu

$$(1b.11) \quad y = \frac{\mathcal{Z}^2}{\mathcal{Z}^2 + \mathcal{Z}} \approx \frac{\mathcal{Z}^2}{\xi\eta q^2} = \left(\frac{q_{12}}{q}\right)^2, \quad x = 1 - y \approx \left(\frac{q_{11}}{q}\right)^2$$

über und erhalten schließlich

$$(1b.12) \quad d\mathcal{Z}_{E_1} = 2\bar{\phi} \frac{E_1^2 dE_1}{R^3} \left(1 + \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha\right) (-\log \mathcal{Z}^2 - 1).$$

Totaler Wirkungsquerschnitt

Zur Integration über E_1 setzen wir $E_1 = \varepsilon R$, $\frac{1}{R} \leq \varepsilon \leq \frac{R-1}{R}$.
Mit $\alpha = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ergibt sich aus Gl. (1b.12)

$$d\mathcal{Z} = 4\bar{\phi} \left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{4}{3}\varepsilon^2\right) \left\{ \log 2R\varepsilon(1-\varepsilon) - \frac{1}{2} \right\} d\varepsilon.$$

Wir integrieren über $0 \leq \varepsilon \leq 1$ und erhalten

$$(1b.13) \quad \mathcal{Z} = 4\bar{\phi} \cdot \frac{4}{9} \left\{ \log 2R - \frac{\log 2}{42} \right\}.$$

2. Abschirmung

Thomas-Fermi-Atom

Bei Berücksichtigung der Elektronenhülle ist die potentielle Energie eines Elektrons im Feld des Atoms

$$(2.1) \quad V(r) = - \frac{Ze^2}{r} + e^2 \int \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' = - \frac{Ze^2}{r} \varphi(r);$$

dabei ist $\rho(r')$ die mittlere Dichteverteilung der Elektronenhülle.

Die Funktion $\varphi(r)$ kann am einfachsten (aber nicht sehr genau) berechnet werden mit Hilfe des Thomas-Fermi-Modells^{*}). Beim neutralen Atom erhält man für φ die Differentialgleichung⁴⁾

$$(2.2) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

mit den Randbedingungen

$$(2.3) \quad \varphi(0) = 1, \quad \left. \begin{array}{l} \varphi(x_0) = 0 \\ \varphi'(x_0) = 0 \end{array} \right\} \text{ für } x_0 \rightarrow \infty.$$

Dabei ist

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \mu x \\ \mu = 137 \mathcal{R}_0 \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{12,812}} = \frac{121}{3\sqrt{2}}, \end{array} \right.$$

letzteres wegen $\mathcal{R}_0 = \frac{\hbar}{mc} = 1$.

Eine analytische Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (2.2) mit den Randbedingungen (2.3) ist nicht möglich.

*) Genauer, aber ziemlich umständlich ist die Hartree'sche Methode des self-consistent field. Bei der Hartree'schen Methode muß der Atomformfaktor für jedes Z numerisch berechnet werden, während sich bei der Verwendung von Näherungslösungen der Thomas-Fermi-Gleichung die Wirkungsquerschnitte in analytischer Form angeben lassen. Der Unterschied ist nur bei kleinem Z wesentlich.

4) siehe Gombas, Statistische Behandlung des Atoms, Handbuch der Physik, Band XXXVI.

Die Entwicklung der Lösung am Nullpunkt lautet⁵⁾

$$(2.5) \quad \varphi(x) = 1 - Bx + \frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}Bx^{5/2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{40}B^2x^{7/2} - \frac{2}{15}Bx^4 + \left(\frac{2}{24} + \frac{1}{252}B^3\right)x^{9/2} + \frac{1}{145}B^2x^5 - \left(\frac{31}{1485}B - \frac{1}{1056}B^4\right)x^{11/2} + \dots$$

Die Steigung der Anfangstangente ist

$$(2.6) \quad \varphi'(0) = -B = -1,588040942.$$

Mit (2.5) und (2.6) kann die Gl. (2.2) als Anfangswertaufgabe numerisch gelöst werden: $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ sind für $0 \leq x \ll 1$ bekannt.

Wir verwenden statt der exakten numerischen Lösung Näherungsausdrücke für $\varphi(x)$. Eine rohe Näherung ist die exponentielle Abschirmung

$$(2.7) \quad \varphi(x) = e^{-\kappa x}.$$

Der Parameter κ kann nach dem Ritzschen Variationsverfahren bestimmt werden; dies liefert $\kappa = \frac{2}{5} \sqrt{4\pi} = 0,930$ ⁶⁾. Wir werden im folgenden $\kappa = 1,09$ setzen (siehe Gl. (2a.10)).

Von Molière⁷⁾ wurde die Thomas-Fermi-Funktion durch

$$(2.8) \quad \varphi(x) = 0,1 e^{-6x} + 0,55 e^{-1,2x} + 0,35 e^{-0,3x}$$

approximiert; der Fehler in $0 \leq x \leq 6$ ist kleiner als 0,002.

Atomformfaktor

In Bornscher Näherung wird der Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung und Paarerzeugung durch das Matrixelement

$$(2.9) \quad M = \int V(r) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$

bestimmt. Mit dem $V(r)$ von Gl. (2.1) wird

$$(2.10) \quad M = -2\pi i Z e^2 \int_0^\infty \varphi(r) r dr \int_0^\pi e^{iqr \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{4\pi i Z e^2}{q} \int_0^\infty \varphi(r) \sin qr dr.$$

5) Baker, Phys. Rev. 36, 630 (1930).

6) Flüge-Marschall, Rechenmethoden der Quantentheorie, 2. Aufl., S. 262.

7) Z. Naturforschung 2a, 133 (1947).

Für die exponentielle Abschirmung (2.7) ergibt sich

$$M = - \frac{4\pi \frac{1}{2} e^2}{q^2} \cdot \frac{q^2}{\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 + q^2}.$$

Dies liefert den Faktor

$$M^2 \sim \frac{\frac{1}{2} e^4}{q^4} [1 - F(q, \frac{1}{2})]^2$$

in den Gl. (1a.2) und (1b.2); für die exponentielle Abschirmung ist

$$(2.11) \quad [1 - F(q, \frac{1}{2})]^2 = \frac{q^4}{(\beta^2 + q^2)^2}, \quad \beta = \frac{\alpha^{3/2}}{12A}.$$

$F(q, Z)$ heißt Atomformfaktor. Für $\alpha \rightarrow 0$ (reines Coulombfeld) wird $F(q, Z) = 0$, und man erhält die in Abschnitt 1 angegebenen Wirkungsquerschnitte.

Stoßparameter

Der dem Teilchenbild entnommene Begriff Stoßparameter hat in einer quantentheoretischen Rechnung zunächst keine Bedeutung; denn in Gl. (2.9) ist das Elektron durch ebene Wellen beschrieben, und es wird über alle Stoßparameter gemittelt. Man kann aber fragen, welche r in Gl. (2.10) den Hauptbeitrag liefern. Diese r sind von der Größenordnung $r = \frac{1}{q}$. Für kleinere r sind die Beiträge klein, weil $\sin qr$ klein ist. Für größere r geht $\varphi(r) \rightarrow 0$, und $\sin qr$ oszilliert. $b = \frac{1}{q}$ kann also als Stoßparameter gedeutet werden: Prozesse, bei denen der Impuls q übertragen wird, finden im wesentlichen im Abstand b vom Kern statt.

Wir diskutieren die Verhältnisse bei der Bremsstrahlung; für die Paarerzeugung gilt entsprechendes. Der kleinste Impuls, der aus Atom übertragen werden kann, ist $q_{\min} = \delta$. Dies bedeutet: Stoßparameter, die größer sind als

$$b_{\max} = \frac{1}{q_{\min}} = \frac{1}{\delta} = \frac{2E_0 E}{k}$$

tragen nichts zur Ausstrahlung bei. Durch die Abschirmung kann der Bereich $b < b_{\max}$ noch weiter eingeschränkt werden.

Wir bezeichnen als Atomradius a einen Abstand vom Kern, in dem die potentielle Energie $V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \varphi(r)$ nahezu auf Null abgefallen ist. Die Elektronenhülle liegt dann im Gebiet $r \lesssim a$ und schirmt das Kernfeld für $r \approx a$ teilweise, für $r \gg a$ vollständig ab. Wenn aber $V(r) = 0$ ist, findet keine Ausstrahlung statt. Infolge der Abschirmung tragen Stoßparameter, die sehr groß gegen a sind, nichts zur Ausstrahlung bei.

Man unterscheidet die Fälle

- 1.) $b_{\max} \ll a$: keine Abschirmung. Die Elektronenhülle hat keinen Einfluß auf die Ausstrahlung, und es gelten die in Abschnitt 1 angegebenen Formeln. Mit wachsendem E_0 wird $b_{\max}$ und damit auch der Wirkungsquerschnitt größer.
- 2.) $b_{\max} \approx a$: teilweise Abschirmung.
- 3.) $b_{\max} \gg a$: vollständige Abschirmung. Mit wachsendem E_0 wird zwar $b_{\max}$ größer, aber die neu hinzukommenden Stoßparameter sind vollständig abgeschirmt, so daß sich der Wirkungsquerschnitt nicht mehr ändert.

Beim Thomas-Fermi-Atom ist der Atomradius $a \approx \mu \approx \frac{137}{3^{1/2}}$; denn für $\kappa \kappa = 1$ ist nach Gl. (2.7) $\varphi(\kappa)$ auf den e -ten Teil abgefallen, und $\kappa \kappa = 1$ bedeutet $r = \frac{a}{\kappa} \approx \frac{137}{3^{1/2}}$. Die Abschirmung ist also nur von Einfluß für

$$(2.12) \quad q \lesssim \frac{3^{1/2}}{137} \ll 1.$$

Für vollständige Abschirmung, $q \ll \frac{3^{1/2}}{137}$, erhält man die richtige Größenordnung für den Wirkungsquerschnitt, wenn man $\delta = \frac{1}{b_{\max}}$ durch $\frac{1}{a} \approx \frac{137}{3^{1/2}}$ ersetzt. Das $-\log \delta^2$ in Gl. (1a.19) ist dann zu ersetzen durch $2 \log \frac{137}{3^{1/2}}$. Die exakte Rechnung für das Thomas-Fermi-Atom liefert bei vollständiger Abschirmung⁸⁾

$$(2.13) \quad d\sigma_R = 4\pi \frac{dR}{R} \left\{ \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \log \frac{183}{3^{1/2}} + \frac{\varepsilon}{9} \right\}.$$

8) Bethe, Proc. Cambridge Phil. Soc. 30, 524 (1934); Gl. (54).

Wirkungsquerschnitte

a) Bremsstrahlung

Da die Abschirmung nur für $q \ll 1$ von Einfluß ist, kann sie nachträglich als Korrektur berechnet werden. Die in Gl. (1a.11) zu addierende Abschirmungskorrektur ist

$$(2a.1) \quad d\sigma_{R,\xi,\eta,2}^{kor.} = \{ [1-F(q)]^2 - 1 \} d\sigma_{R,\xi,\eta,2}.$$

Dabei kann

$$(2a.2) \quad [1-F(q)]^2 \approx \left[1 - F\left(\frac{\delta}{\xi\sqrt{y}}\right) \right]^2$$

gesetzt werden. Zunächst ist nämlich nach Gl. (1a.13) $q^2 = \frac{\delta^2}{\xi\eta\gamma}$. Aus $1 \gg q^2 > q_{\perp}^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \phi$ folgt dann $\xi \approx \eta$; vergl. hierzu die Herleitung von Gl. (1a.8).

Die η -Integration in (2a.1) wird durch den Faktor (2a.2) nicht berührt, und man erhält

$$d\sigma_{R,\xi,x}^{kor.} = \{ [1-F(q)]^2 - 1 \} d\sigma_{R,\xi,x}$$

mit $d\sigma_{R,\xi,x}$ aus Gl. (1a.14). Der Faktor $\{ [1-F(q)]^2 - 1 \}$ ist nur für $q \ll 1$ wesentlich von Null verschieden. Nach Gl. (1a.13) ist dann $\frac{\delta^2 x}{1-x} \approx \xi\eta q_{\perp}^2 \ll 1$, und das Glied mit $\frac{\delta^2 x}{1-x}$ liefert keinen wesentlichen Beitrag zu $d\sigma_{R,\xi,x}^{kor.}$. Die zu Gl. (1a.14) zu addierende Abschirmungskorrektur ist also

$$(2a.3) \quad d\sigma_{R,\xi,x}^{kor.} = 2\bar{\phi} \frac{dR}{R} [1 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon\xi(1-\xi)] d\xi \cdot \{ [1-F(q)]^2 - 1 \} \frac{x dx}{1-x}.$$

Bei der Integration über x wird

$$(2a.4) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\xi} \right) = \int_0^{1-\delta^2} \{ [1-F(q)]^2 - 1 \} \frac{x dx}{1-x} \approx 2 \int_{\delta/\xi}^{\infty} \{ [1-F(q)]^2 - 1 \} \frac{q^2 - (\frac{\delta}{\xi})^2}{q^3} dq.$$

Die obere Grenze des q -Integrals ist $\frac{1}{\xi} \geq 1$; sie kann gleich ∞ gesetzt werden, weil $\{ [1-F(q)]^2 - 1 \}$ für $q \geq 1$ praktisch gleich Null ist.

Addition der Abschirmungskorrektur zu (1a.17) ergibt

$$(2a.5) \quad d\mathcal{B}_{R,\xi} = 2\bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ 16\epsilon\xi(1-\xi) - (1+\epsilon)^2 - [1+\epsilon^2 - 4\epsilon\xi(1-\xi)] \left[\log \delta^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\xi} \right) \right] \right\} d\xi.$$

Die nachträgliche Berechnung der Abschirmungskorrektur unter Benutzung von $\xi \approx \eta$ stammt von Olsen und Maximon¹⁾. Unser $\frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\xi} \right)$ unterscheidet sich von dem bei Olsen und Maximon definierten $\frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\xi} \right)$ um den Faktor 2.

Für die exponentielle Abschirmung wird mit dem $[1 - F(q)]^2$ von Gl. (2.11)

$$(2a.6) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\xi} \right) = -\log \left(1 + \frac{\beta^2 \xi^2}{\delta^2} \right).$$

Hiermit wird aus Gl. (2a.5)

$$(2a.7) \quad d\mathcal{B}_{R,\xi} = 2\bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ 16\epsilon\xi(1-\xi) - (1+\epsilon)^2 + [1+\epsilon^2 - 4\epsilon\xi(1-\xi)] \log M(\xi) \right\} d\xi,$$

wobei

$$(2a.8) \quad \frac{1}{M(\xi)} = \delta^2 + \beta^2 \xi^2, \quad \beta = \frac{3/\sqrt{2}}{C}, \quad C = \frac{121}{\alpha}$$

ist. Mit u als Variable lautet (2a.7)

$$(2a.9) \quad d\mathcal{B}_{R,u} = 4\bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ 16\epsilon\xi^2 u^2 - (1+\epsilon)^2 + [1+\epsilon^2 - 4\epsilon\xi^2 u^2] \log M(\xi) \right\} \xi^2 u du.$$

Diese Gleichung wurde von Schiff⁹⁾ angegeben; er setzt

$$(2a.10) \quad C = \frac{183}{\gamma e} = 111.$$

Dies entspricht einem $\alpha = 1,09$. Die von Schiff geforderte Bedingung $\mu = E_0 \Theta_0 \geq \frac{3/\sqrt{2}}{111}$ für den Emissionswinkel ist nicht notwendig.

Bei der ξ -Integration in (2a.7) treten die Integrale

$$\int_0^1 \log M(\xi) d\xi = \log M(1) - \frac{2}{b} \operatorname{arctg} b + 2$$

und

$$\int_0^1 \xi(1-\xi) \log M(\xi) d\xi = \frac{1}{6} \log M(1) - \frac{1}{2b^2} \log(1+b^2) - \frac{2}{3b^3} \operatorname{arctg} b + \frac{2}{3b^2} + \frac{5}{18}$$

9) Phys. Rev. 83, 252 (1951).

auf; dabei ist

$$(2a.11) \quad \frac{1}{M(1)} = \delta^2 + \beta^2 = \delta^2(1+b^2), \quad b = \frac{\beta}{\delta} = \frac{\sqrt[3]{Z}}{\delta C}.$$

Hiermit wird

$$(2a.12) \quad dZ_R = 2\bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ (1+\varepsilon^2 - \frac{2}{3}\varepsilon) \left[\log M(1) - \frac{2}{b} \operatorname{arctg} b + 1 \right] \right. \\ \left. + \varepsilon \left[\frac{2}{b^2} \log(1+b^2) + \frac{4(2-b^2)}{3b^3} \operatorname{arctg} b - \frac{8}{3b^2} + \frac{2}{9} \right] \right\}.$$

Diese Gleichung stammt ebenfalls von Schiff⁹⁾. Der Summand $\varepsilon[\dots]$ ist für $b = \infty$ gleich $\frac{2\varepsilon}{9}$, fällt mit abnehmendem b monoton und kann für $b < 3$ weggelassen werden. Für $b \rightarrow 0$ (keine Abschirmung) geht (2a.12) in Gl. (1a.19) über. Für vollständige Abschirmung, $b \gg 1$, wird

$$dZ_R = 4\bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ (1+\varepsilon^2 - \frac{2}{3}\varepsilon) \log \frac{C\sqrt[3]{Z}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\varepsilon}{9} \right\}.$$

Der Vergleich mit (2.13) liefert den von Schiff angegebenen C-Wert (2a.10). Die Schiff-Formeln (2a.9) und (2a.12) geben die exakten Wirkungsquerschnitte für das Thomas-Fermi-Atom bei keiner Abschirmung und bei vollständiger Abschirmung. Bei teilweiser Abschirmung sind die durch (2a.12) gegebenen Werte für die Frequenzverteilung zu groß; der Fehler beträgt in ungünstigen Fällen (bei großem Z) bis zu 4 %.

Zur Verbesserung der Schiff-Formeln wurde von Olsen und Maximon statt der exponentiellen Abschirmung (2.7) die Molièresche Näherung (2.8) benutzt, siehe¹⁾, Gl. (6.31) und (8.15). Dies ergibt Formeln, die genau die Werte der Rechnung von Bethe und Heitler liefern, aber sehr unhandlich sind.

Eine einfache Formel, die in guter Näherung die Bethe-Heitler-Werte liefert, erhält man, wenn man nicht $\varphi(x)$, sondern $[1-F(q)]^2$ durch geeignete Näherungen approximiert. Eine solche Näherung ist

$$(2a.13) \quad [1-F(q)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{q_i^4}{(\beta_i^2 + q^2)^2}$$

mit

$$(2a.14) \quad \alpha_1 = 0,52, \quad \alpha_2 = 2,3, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i \sqrt[3]{Z}}{121}.$$

10) Proc. Roy. Soc. A 146, 83 (1934).

Der Ansatz (2a.13) ist eine Erweiterung von (2.11), so daß die Schiff-Formeln übernommen werden können. Die $\kappa_{1,2}$ wurden durch Probieren gefunden. $\varphi(x)$ ergibt sich aus (2a.13) durch Fourierumkehr (siehe Gl. (2.10)) zu

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\omega^2}{(\kappa_i^2 + \omega^2)^2}} \sin \omega x d\omega.$$

In den Fig. 1 und 2 sind $\varphi(x)$ und $[1 - F(q)]^2$ nach Gl. (2a.13) im Vergleich mit der exakten Thomas-Fermi-Kurve und der Schiff-schen Näherung angegeben.

Mit dem Atomformfaktor (2a.13) wird

$$(2a.15) \quad d\mathcal{G}_{R,\mu} = 4\bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ 16\varepsilon \xi^2 \mu^2 - (1+\varepsilon)^2 + [1+\varepsilon^2 - 4\varepsilon \xi^2 \mu^2] \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \log H_i(\xi) \right\} \xi^2 \mu d\mu$$

mit

$$(2a.16) \quad \frac{1}{H_i(\xi)} = \delta^2 + \beta_i^2 \xi^2, \quad \beta_i = \frac{\sqrt[3]{12}}{C_i}, \quad C_1 = 233, \quad C_2 = 52,6.$$

Entsprechend ist die Gl. (2a.12) zu verallgemeinern. Das Resultat kann in der Form

$$(2a.17) \quad d\mathcal{G}_R = \bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ (1+\varepsilon^2) \varphi_1 - \frac{2}{3} \varepsilon \varphi_2 \right\}$$

mit

$$(2a.18) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 2 - 4 \log \delta - \sum_{i=1}^2 \left\{ \log(1+b_i^2) + \frac{2}{b_i} \operatorname{arctg} b_i \right\} \\ \varphi_2 = \frac{4}{3} - 4 \log \delta - \sum_{i=1}^2 \left\{ \left(1 + \frac{3}{b_i^2}\right) \log(1+b_i^2) + \frac{4}{b_i^3} \operatorname{arctg} b_i - \frac{4}{b_i^2} \right\} \end{cases}$$

geschrieben werden. Die Schiff-Formeln erhält man, wenn man $C_1 = C_2 = 111$ setzt.

In der Schreibweise von Bethe und Heitler¹⁰⁾ ist

$$(2a.19) \quad d\mathcal{G}_R = \bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ (1+\varepsilon^2) \left[\phi_1(\gamma) - \frac{4}{3} \log \gamma^2 \right] - \frac{2}{3} \varepsilon \left[\phi_2(\gamma) - \frac{4}{3} \log \gamma^2 \right] \right\};$$

dabei ist

$$(2a.20) \quad \gamma = \frac{100 R}{E_0 E \sqrt{12}} = \frac{200 \delta}{\sqrt{12}}.$$

Keine Abschirmung bedeutet $y \gg 1$, vollständige Abschirmung $y \approx 0$. Die Funktionen $\phi_{1,2}(y)$ wurden von Bethe und Heitler numerisch berechnet; sie sind in¹⁰⁾ in Kurvenform angegeben. Nach Butcher und Messel¹¹⁾ können sie approximiert werden durch

$$(2a.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1(y) = 20,864 - 4,409 y + 1,156 y^2 \\ \phi_2(y) = 20,209 - 2,625 y - 0,159 y^2 \end{array} \right\} \text{ für } y \leq 0,735$$

$$\phi_1(y) = \phi_2(y) = 19,80 - 4,184 \log(y + 0,695) \text{ für } y > 0,735.$$

Aus den Gl. (2a.17-20) folgt

$$\phi_{1,2}(y) = \varphi_{1,2} + \frac{4}{3} \log \gamma z, \quad b_i = \frac{200}{y C_i},$$

$$-4 \log \gamma = 4 \log 200 - 4 \log y - \frac{4}{3} \log \gamma z.$$

Hiermit läßt sich die Genauigkeit der angegebenen Näherung vergleichen:

y	0	0,4	0,826	1,22	1,65	2	3	5
ϕ_1 , Bethe und Heitler [*])	20,84	19,28	18,00	17,08	16,22	15,64	—	—
Butcher und Messel	20,88	19,29	18,05	17,08	16,23	15,65	14,33	12,52
nach Gl. (2a.18)	20,82	19,25	17,98	17,07	16,25	15,69	14,39	12,58
Schiff	20,83	19,54	18,36	17,44	16,58	15,97	14,58	12,67
ϕ_2 , Butcher und Messel	20,21	19,13	18,05	17,08	16,23	15,65	14,33	12,52
nach Gl. (2a.18)	20,15	19,12	17,95	17,07	16,26	15,70	14,40	12,58
Schiff	20,16	19,44	18,38	17,47	16,61	16,00	14,59	12,67

Zur Berechnung der Frequenzverteilung ist die Bethe-Heitler-Formel (2a.19-21) bequemer als die Gl. (2a.17-18). Da es aber bei Bethe und Heitler keine Formel für den auch im Photonwinkel differentiellen Wirkungsquerschnitt gibt, muß zur Berechnung von $d\sigma_{R,\mu}$ die Gl. (2a.15) benutzt werden.

11) Phys. Rev. 112, 2096 (1958) und Nuclear Physics 20, 15 (1960).

*) siehe Olsen und Maximon¹⁾, Tabelle II.

Gesamter Strahlungsverlust

$\phi_{\text{St.}} = \int \frac{k}{E_0} d\Omega_k$ kann aus (2a.19) berechnet werden, wenn man die $\phi_{1,2}(\xi)$ von Gl. (2a.21) einsetzt und ξ als Integrationsvariable benutzt. Dies liefert jedoch sehr lange Formeln, so daß eine numerische Integration bequemer ist.

Durch die Abschirmung wird insbesondere die Zahl der weichen Quanten stark reduziert. Nach Gl. (1a.20) divergiert $d\phi_{\text{St.}}$ wegen des $\log \frac{2E_0 E}{k}$ für $k \rightarrow 0$. Diese Divergenz verschwindet infolge der Abschirmung. Für $k \rightarrow 0$ geht $\xi \rightarrow 0$, und dies bedeutet vollständige Abschirmung. Nach Gl. (2.13) ist dann $d\phi_{\text{St.}} = \frac{k}{E_0} d\Omega_k$ endlich.

b) Paarerzeugung

Die Wirkungsquerschnitte für Bremsstrahlung (1a.11) und Paarerzeugung (1b.10) unterscheiden sich durch

$$(2b.1) \quad \frac{dk}{k} \rightarrow \frac{E_1^2 dE_1}{k^3}, \quad \delta \rightarrow -\alpha.$$

Hiermit ergibt sich aus Gl. (1a.12)

$$d\Omega_{E_1, \xi, 2} = 2\bar{\phi} \frac{E_1^2 dE_1}{k^3} \left\{ 2[1 + \alpha^2 + 4\alpha\xi(1-\xi)] + 2\alpha^2[1 - 6\xi(1-\xi)] \right\} \frac{d\Omega d\xi}{(\delta^2 + 2)^2}.$$

Die weitere Rechnung verläuft genau wie bei der Bremsstrahlung. Die Schiff-Formeln (2a.9) und (2a.12) lauten

$$(2b.2) \quad d\Omega_{E_1, \mu} = 4\bar{\phi} \frac{E_1^2 dE_1}{k^3} \left\{ -16\alpha\xi^2\mu^2 - (1-\alpha)^2 + [1 + \alpha^2 + 4\alpha\xi^2\mu^2] \log H(\xi) \right\} \xi^2 \mu d\mu$$

mit

$$\frac{1}{H(\xi)} = \delta^2 + \beta^2 \xi^2, \quad \beta = \frac{\sqrt{2}}{c}$$

und

$$(2b.3) \quad d\Omega_{E_1} = 2\bar{\phi} \frac{E_1^2 dE_1}{k^3} \left\{ (1 + \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha) \left[\log H(1) - \frac{2}{b} \alpha \log b + 1 \right] - \alpha \left[\frac{2}{b^2} \log(1 + b^2) + \frac{4(2 - b^2)}{3b^3} \alpha \log b - \frac{8}{3b^2} + \frac{2}{9} \right] \right\}$$

mit

$$\frac{1}{M(\lambda)} = \delta^2(1 + \ell^2), \quad \ell = \frac{\sqrt[3]{\lambda}}{\delta C},$$

wobei jetzt natürlich das δ von Gl. (1b.6) gemeint ist. Die nach (2a.13) verbesserten Formeln lassen sich mit (2b.1) leicht aus den Bremsstrahlungsformeln entnehmen, so daß wir sie hier nicht anzugeben brauchen.

3. Coulomb-Korrektur

Statt durch ebene Wellen (= Bornsche Näherung) wird das Elektron beschrieben durch Wellenfunktionen vom Sommerfeld-Maue-Typ^{12, 13)}:

$$(3.1) \quad \psi = e^{i\vec{p}\vec{r}} \left\{ 1 - \frac{i}{2E} (\vec{\alpha} \cdot \vec{q}_{\text{rad}}) \right\} u(\vec{p}) F\left(\frac{iaE}{p}; 1; i p r - i \vec{p} \cdot \vec{r}\right).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \text{Dirac-Operator} \\ u(\vec{p}) &= \text{Spinor für die ebene Welle} \\ F &= \text{konfluente hypergeometrische Funktion} \end{aligned}$$

und

$$(3.2) \quad a = Z/137.$$

Mit der Wellenfunktion (3.1) wurden von Bethe und Maximon¹³⁾ die differentiellen Wirkungsquerschnitte für Bremsstrahlung und Paarerzeugung berechnet. Die Integrationen wurden für die Paarerzeugung von Davies, Bethe und Maximon¹⁴⁾, für die Bremsstrahlung von Olsen und Maximon¹⁵⁾ ausgeführt.

Die Wellenfunktion (3.1) liefert eine Entwicklung der Wirkungsquerschnitte nach Potenzen von $\frac{a}{E} = \frac{Z}{137 E}$. Wie bei der Bornschen Näherung ist also weiterhin $\beta \approx 1$, $E \gg 1$ vorausgesetzt, nur die in (1a.4) geforderte Beschränkung auf kleine Z fällt weg. Die Fehler sind höchstens $\approx 1\%$, wenn bei der Bremsstrahlung $E > 50$ MeV und bei der Paarerzeugung $E_{1,2} > 50$ MeV ist.

a) Bremsstrahlung

Wir lassen die Abschirmung zunächst weg. Zur Berücksichtigung der Coulomb-Korrektur ist der Bethe-Heitler-Wirkungsquerschnitt (1a.2) mit dem Faktor

12) siehe Rose, Relativistic Electron Theory, S. 237.

13) Phys. Rev. 93, 768 (1954); zitiert als BM.

14) Phys. Rev. 93, 788 (1954); zitiert als DBM.

15) Phys. Rev. 114, 887 (1959); zitiert als OM.

$$(3a.1) \quad R(x) = \left(\frac{\pi \alpha}{\Gamma_{1/2} \pi \alpha} \right)^2 \{ V^2(x) + \alpha^2 y^2 W^2(x) \}$$

(siehe BM, Gl. (8.20)) zu multiplizieren. Dabei ist

$$(3a.2) \quad \begin{cases} y = \frac{\delta^2}{\xi \eta q^2} \approx \left(\frac{q_2}{q} \right)^2, \quad x = 1 - y \approx \left(\frac{q_1}{q} \right)^2 \text{ (siehe Gl. (1a.13))} \\ V(x) = F(-i\alpha, i\alpha; 1; x) \quad (F = \text{hypergeometrische Funktion}) \\ W(x) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{dV}{dx} = F(1-i\alpha, 1+i\alpha; 2; x). \end{cases}$$

Der Faktor (3a.1) gilt auch für die Bremsstrahlung durch ein Positron. Die Wellenfunktionen für Elektron und Positron unterscheiden sich zwar durch das Vorzeichen im Parameter $\frac{iaE}{p}$ der konfluenten hypergeometrischen Funktion, in (3a.1) jedoch verschwindet dieser Unterschied, wenn der Endzustand, wie vorausgesetzt, extrem relativistisch ist.

Die Funktionen $V(x)$ und $W(x)$ haben die Potenzreihenentwicklung

$$(3a.3) \quad V(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m!)^2} x^m, \quad W(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!(m+1)!} x^m$$

mit

$$(3a.4) \quad \begin{cases} b_0 = c_0 = 1 \\ b_m = \alpha^2 (1^2 + \alpha^2) (2^2 + \alpha^2) \dots ((m-1)^2 + \alpha^2) \\ c_m = (1^2 + \alpha^2) (2^2 + \alpha^2) \dots (m^2 + \alpha^2) \end{cases} \quad \text{für } m \geq 1.$$

$V(x)$ konvergiert für $0 \leq x \leq 1$, $W(x)$ für $0 \leq x < 1$. Für $x \approx 1$ konvergieren die Reihen (3a.3) sehr langsam; hier werden zweckmäßig die Entwicklungen^{*})

$$(3a.5) \quad \begin{aligned} V(x) &= \frac{\Gamma_{1/2} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left\{ 1 - \alpha^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!(m+1)!} [\beta_m - \log(1-x)] (1-x)^{m+1} \right\} \\ W(x) &= \frac{\Gamma_{1/2} \pi \alpha}{\pi \alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{(m!)^2} [\gamma_m - \log(1-x)] (1-x)^m \end{aligned}$$

benutzt. Die c_m sind in (3a.4) angegeben. Für β_m und γ_m gelten Rekursionsformeln:

^{*}) siehe Erdélyi, Higher Transcendental Functions, Bd. II, S. 110, Gl. (12). Die dort angegebenen β_m und γ_m lassen sich mit Hilfe der Funktionalgleichung der ψ -Funktion und der Darstellung

$$\psi(\frac{1}{2}) = -C + (1/2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1/2-1)}, \quad C = 0,574215...$$

in die Form (3a.6) bringen.

$$(3a.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 1 - 2\zeta(1/2), \quad \gamma_0 = -2\zeta(1/2) \\ \beta_{m+1} = \beta_m + \frac{(m+1)+(m+2)}{(m+1)(m+2)} - \frac{2(m+1)}{(m+1)^2 + \alpha^2} \\ \gamma_{m+1} = \gamma_m + \frac{2}{m+1} - \frac{2(m+1)}{(m+1)^2 + \alpha^2} \\ \zeta(1/2) = \alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m^2 + \alpha^2)} = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} - \sum_{m=1}^{\infty} (-\alpha^2)^m \{ \zeta(2m+1) - 1 \} \\ = \alpha^2 \left\{ \frac{1}{1 + \alpha^2} + 0,20206 - 0,0369\alpha^2 + 0,0083\alpha^4 - 0,002\alpha^6 + \dots \right\}; \end{array} \right.$$

$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ bedeutet dabei die Riemannsche Zetafunktion. In Fig. 3 sind die Funktionen $V(x)$ und $W(x)$ für Blei, in Fig. 4 ist die Coulomb-Korrekturfunktion $f(Z)$ angegeben.

Im allgemeinen ist $q_{\perp} \ll q$. Nach Gl. (3a.2) ist dann $y \ll 1$ und $x \approx 1$. Für $x \approx 1$ ist nach (3a.5)

$$(3a.7) \quad V(x) \approx \frac{d_{\text{im}} \bar{u} \alpha}{\pi \alpha}, \quad W(x) \approx -\frac{d_{\text{im}} \bar{u} \alpha}{\pi \alpha} \{ 2\zeta(1/2) + \log y \}.$$

Das $yW(x)$ in (3a.1) ist dann $O(y \log y)$ und kann vernachlässigt werden. Mit $R(x) \approx 1$ ergibt sich der Wirkungsquerschnitt von Bethe-Heitler.

Abweichungen von der Bethe-Heitler-Formel treten auf für $q_{\perp} \approx 0$. Damit ist $x \approx 0$, und der Wirkungsquerschnitt ist kleiner als bei Bethe-Heitler.

Für $q_{\perp} \approx 0$, $q \ll 1$ wird auch die Abschirmungskorrektur wesentlich. Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts müssen Abschirmung und Coulomb-Korrektur gleichzeitig berücksichtigt werden; die Multiplikation mit dem Abschirmungsfaktor $[1 - F(q)]^2$ ist nur in Bornscher Näherung erlaubt. Die Rechnung von Olsen, Maximon und Wergeland¹⁶⁾ liefert folgendes Ergebnis:

16) Phys. Rev. 106, 27 (1957), Gl. (7b.13); zitiert als OMW. Vergl. hierzu auch Koch und Motz, Rev. Mod. Phys. 31, 920 (1959), Formel 1CS.

In der Bethe-Heitler-Formel (1a.2) ist $[1 - F(q)]^2$ zu ersetzen durch

$$(3a.8) \quad \mathcal{B} = \frac{q^4}{q_{\perp}^2} \left| \int_0^{\infty} \varphi d\varphi h_1(\varphi q_{\perp}) \int_0^{\infty} \frac{y^2 h_1(\varphi y) [1 - F(\sqrt{y^2 + q_{\perp}^2})]}{y^2 + q_{\perp}^2} dy \right. \\ \left. \cdot \exp \left\{ 2ia \int_0^{\infty} \frac{h_0(\varphi x) [1 - F(x)]}{x} dx \right\} \right|^2,$$

wobei h_0 und h_1 Besselfunktionen sind. Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts ohne Abschirmung darf, wie in OMW diskutiert wird, das $F(x)$ nicht identisch gleich Null gesetzt werden.

Wir zeigen, daß $\mathcal{B}$ für $a = 0$ (nur Abschirmung, keine Coulomb-Korrektur) in den Abschirmungsfaktor $[1 - F(q)]^2$, für $F(q) = 0$ (nur Coulomb-Korrektur, keine Abschirmung) in den Bethe-Maximon-Faktor $R(x)$ von Gl. (3a.1) übergeht.

Für die exponentielle Abschirmung wird mit dem $[1 - F(q)]$ von Gl. (2.11)¹⁷⁾

$$\int_0^{\infty} \frac{h_0(\varphi x) [1 - F(x)]}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x h_0(\varphi x)}{\beta^2 + x^2} dx = K_0(\varphi \beta)$$

und

$$\int_0^{\infty} \frac{y^2 h_1(\varphi y) [1 - F(\sqrt{y^2 + q_{\perp}^2})]}{y^2 + q_{\perp}^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{y^2 h_1(\varphi y)}{\beta^2 + q_{\perp}^2 + y^2} dy = \sqrt{\beta^2 + q_{\perp}^2} K_1(\varphi \sqrt{\beta^2 + q_{\perp}^2}).$$

K_0 und K_1 sind die modifizierten Besselfunktionen. Hiermit erhält man

$$(3a.9) \quad \mathcal{B} = \frac{q^4(\beta^2 + q_{\perp}^2)}{q_{\perp}^2} \left| \int_0^{\infty} \varphi h_1(\varphi q_{\perp}) K_1(\varphi \sqrt{\beta^2 + q_{\perp}^2}) e^{2ia K_0(\varphi \beta)} d\varphi \right|^2.$$

Für $a \rightarrow 0$ ergibt sich mit¹⁸⁾

$$\int_0^{\infty} \varphi h_1(\varphi q_{\perp}) K_1(\varphi \sqrt{\beta^2 + q_{\perp}^2}) d\varphi = \frac{q_{\perp}}{\sqrt{\beta^2 + q_{\perp}^2} (\beta^2 + q_{\perp}^2)}$$

der Abschirmungsfaktor

$$\mathcal{B} \rightarrow [1 - F(q)]^2 = \frac{q^4}{(\beta^2 + q^2)^2}$$

17) Watson, Theory of Bessel Functions, second edition, S. 425, Gl. (5) und (4).

18) Watson, S. 410, Gl. (2) mit $K_1(z) = K_{-1}(z)$.

von Gl. (2.11). Für $F(q) \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ ist

$$K_0(\varphi\beta) \approx -\log \frac{\varphi\beta}{2}, \quad \varphi = 1,481042\dots$$

so daß

$$B = \frac{q_1^4 q_{1/2}^2}{q_1^2} \left| \int_0^\infty \varphi^{1-2i\alpha} h_1(\varphi q_1) K_1(\varphi q_{1/2}) d\varphi \right|^2$$

wird. Es ist¹⁹⁾

$$\int_0^\infty \varphi^{1-2i\alpha} h_1(\varphi q_1) K_1(\varphi q_{1/2}) d\varphi = \frac{q_1^2 \Gamma(1-i\alpha) \Gamma(2-i\alpha)}{2^{2i\alpha} q_{1/2}^{3-2i\alpha}} F(1-i\alpha, 2-i\alpha, 2; -\frac{q_1^2}{q_{1/2}^2})$$

Mit $|\Gamma(1-i\alpha)|^2 = \frac{\pi\alpha}{\Gamma_{AM} \pi\alpha}$, der Transformationsformel

$$F(a, b, c; \tau) = (1-\tau)^{-a} F(a, c-b, c; \frac{\tau}{\tau-1})$$

und $\frac{q_1^2}{q^2} = x$ erhält man

$$B = \left(\frac{\pi\alpha}{\Gamma_{AM} \pi\alpha} \right)^2 \left| (1-i\alpha) F(1-i\alpha, i\alpha, 2; x) \right|^2.$$

Die relatio inter contiguas

$$(c-\alpha) F(b+1, \alpha; c+1; \tau) = c F(a, b, c; \tau) - \alpha (1-\tau) F(a+1, b+1, c+1; \tau)$$

liefert schließlich den Bethe-Maximon-Faktor (3a.1)

Die allgemeine Integration der Bethe-Heitler-Formel (1a.2) mit dem Faktor (3a.8) ist nicht möglich, aber auch nicht nötig. Nach der Integration über die Richtung des austretenden Elektrons (nach der η -Integration) können Abschirmung und Coulomb-Korrektur getrennt berechnet werden. Wie von Olsen²⁰⁾ gezeigt wurde, liefert die Berechnung des Wirkungsquerschnitts mit Coulomb-Korrektur und anschließende Addition der Abschirmungskorrektur (2a.3) dasselbe Ergebnis wie die Integration mit dem beide Korrekturen gleichzeitig enthaltenden Faktor (3a.8). Wir werden diese Verhältnisse bei der Behandlung der Paarerzeugung noch genauer diskutieren.

Der Faktor (3a.1) ist unabhängig von η und ξ . Die Integration über η kann wie in 1a. ausgeführt werden. Die Gl. (1a.14) wird mit dem Faktor (3a.1) multipliziert. Statt (1a.15) ist $\int \frac{x R(x)}{1-x} dx$ zu

19) Watson, S. 410, Gl. (1).

20) Phys. Rev. 99, 1335 (1955).

berechnen. Die Integration gelingt mit Hilfe der Differentialgleichung für $V(x)$:

$$(3a.10) \quad (1-x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{dV}{dx} \right) = a^2 V.$$

Mit (3a.10) und $\frac{dV}{dx} = a^2 W$ wird

$$(3a.11) \quad \begin{aligned} \frac{x}{1-x} (V^2 + a^2 x^2 W^2) &= \left(\frac{V^2}{1-x} + a^2 x W^2 \right) - (V^2 + a^2 x^2 W^2) \\ &= \frac{d}{dx} (x V W) - \frac{d}{dx} [x V^2 - x^2 (1-x) a^2 W^2]. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\int_0^{1-\delta^2} \frac{x R(x)}{1-x} dx = \left(\frac{\pi a}{4 \lambda m \pi a} \right)^2 [x V W - x V^2 + x^2 (1-x) a^2 W^2] \Big|_0^{1-\delta^2} \approx -\log \delta^2 - 1 - 2 f(\frac{1}{2}),$$

letzteres wegen (3a.7); dabei sind Glieder $O(\delta^2 \log \delta)$ vernachlässigt.

Der (1a.16) entsprechende Summand $\delta^2 \int \frac{x^2 R(x)}{(1-x)^2} dx$ liefert nur für $1-x \approx \delta^2$, $x \approx 1$, einen wesentlichen Beitrag. Dann ist $R(x) \approx 1$, und wie in (1a.16) ist

$$\delta^2 \int_0^{1-\delta^2} \frac{x^2 R(x)}{(1-x)^2} dx \approx 1.$$

Hiermit erhält man^{*)}

$$(3a.12) \quad d\mathcal{Z}_{R,\xi} = 2 \bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ (1+\varepsilon^2)(3-2T) - 2\varepsilon [1-4\xi(1-\xi)T] \right\} d\xi$$

mit

$$T = \log \delta + 2 + f(\frac{1}{2}).$$

Addition der Abschirmungskorrektur (2a.3 und 4) ergibt

$$(3a.13) \quad T = \frac{1}{2} \left[\log \delta^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\xi} \right) \right] + 2 + f(\frac{1}{2}).$$

Mit μ als Variable und dem Atomformfaktor (2a.13) wird schließlich

$$(3a.14) \quad d\mathcal{Z}_{R,\mu} = 4 \bar{\phi} \frac{dR}{R} \left\{ (1+\varepsilon^2)(3-2T) - 2\varepsilon [1-4\xi^2 \mu^2 T] \right\} \xi^2 \mu d\mu$$

^{*)} Die Gl. (3a.12 und 13) sind in OM, Gl. (7.2) angegeben. Man beachte, daß T und $\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\xi})$ dort anders definiert sind. $\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\xi})$ wird von OM mit Hilfe der Molièreschen Näherung (2.8) berechnet.

mit

$$(3a.15) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \log(\delta^2 + \beta_i^2 \xi^2) + 2 + f(\eta), \quad \beta_i = \frac{3/\sqrt{2}}{C_i}, \quad C_1 = 233, \quad C_2 = 52,6 \\ \delta &= \frac{k}{2E_0(E_0 - k)}, \quad \varepsilon = \frac{E_0 - k}{E_0}, \quad \mu = E_0 \Theta_0, \quad \xi = \frac{1}{1 + \mu^2}. \end{aligned} \right.$$

$f(Z)$ wird nach den Gl. (3a.6) und (3.2) berechnet.

Die Gl. (3a.14 und 15) enthalten die Abschirmung nach dem Thomas-Fermi-Modell und die Coulomb-Korrektur. $f(Z) = 0$ bedeutet Vernachlässigung der Coulomb-Korrektur, $\beta_i = 0$ Vernachlässigung der Abschirmung. $C_1 = C_2 = 111$ gibt die exponentielle Abschirmung nach Schiff.

Die ξ -Integration wird wie in 2a. ausgeführt und liefert

$$(3a.16) \quad d\mathcal{E}_R = \bar{\phi} \frac{dk}{k} \left\{ (1 + \varepsilon^2) [\varphi_1 - 4f(\eta)] - \frac{2}{3} \varepsilon [\varphi_2 - 4f(\eta)] \right\}$$

mit den $\varphi_{1,2}$ von Gl. (2a.18) oder

$$(3a.17) \quad d\mathcal{E}_R = \bar{\phi} \frac{dk}{k} \left\{ (1 + \varepsilon^2) \left[\phi_1(\eta) - \frac{4}{3} \log \eta - 4f(\eta) \right] - \frac{2}{3} \varepsilon \left[\phi_2(\eta) - \frac{4}{3} \log \eta - 4f(\eta) \right] \right\}$$

mit η von Gl. (2a.20) und den $\phi_{1,2}(\eta)$ von Gl. (2a.21). Für vollständige Abschirmung ist

$$d\mathcal{E}_R = 4 \bar{\phi} \frac{dk}{k} \left\{ (1 + \varepsilon^2 - \frac{2}{3} \varepsilon) \left[\log \frac{183}{3/\sqrt{2}} - f(\eta) \right] + \frac{\varepsilon}{9} \right\}.$$

Die Coulomb-Korrektur ist kleiner als nach der Gültigkeitsbedingung für die Bornsche Näherung (1a.4) zu erwarten ist. Für Blei ist $f(Z) = 0,33$ und $\log \frac{183}{3/\sqrt{2}} = 3,7$. Selbst in ungünstigen Fällen (großes Z , vollständige Abschirmung) beträgt die Coulomb-Korrektur nur 10 %.

In den Fig. 5 bis 8 sind die Wirkungsquerschnitte für Blei angegeben, u. z. in

Fig. 5 und 6: $\frac{k}{\bar{\phi}} \frac{d\mathcal{E}_{R,\mu}}{dk d\mu}$ für $E_0 = 6$ GeV

Fig. 7: $\frac{k}{\bar{\phi}} \frac{d\mathcal{E}_R}{dk}$ für $E_0 = 1$ GeV und 6 GeV

Fig. 8: $\frac{\phi_{str}}{\bar{\phi}} = \frac{1}{\bar{\phi}} \int \frac{k}{E_0} d\mathcal{E}_R$; hier wurde numerisch integriert.

Man beachte, daß $\frac{R}{\phi} \frac{d^2 R_{\mu}}{dR d\mu}$ nicht die differentielle Intensität des γ -Strahls pro Einheitsraumwinkel ist. Diese ist wegen $d\Omega_R = \sin \Theta_0 d\Theta_0 d\phi \sim \mu d\mu$ proportional zu

$$R \frac{d^2 R_{\mu}}{dR dR_R} \sim R \frac{d^2 R_{\mu}}{dR \cdot \mu d\mu}.$$

Die Kurven sind in Fig. 9 (Ordinate in willkürlichen Einheiten) angegeben.

b) Paarerzeugung

Während bei der Bornschen Näherung für das reine Coulombfeld und auch noch bei der Abschirmung Bremsstrahlung und Paarerzeugung parallel behandelt werden konnten, treten bei der Coulomb-Korrektur Unterschiede auf. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung ist komplizierter als der für Bremsstrahlung, und die Integration des Wirkungsquerschnitts ist für die Paarerzeugung sehr viel schwieriger.

Die Unterschiede im differentiellen Wirkungsquerschnitt rühren her vom asymptotischen Verhalten der Wellenfunktionen im Matrixelement. Im Matrixelement für die Bremsstrahlung

$$M_B \sim \int \psi^* \alpha_2 e^{-i \vec{k} \vec{r}} \psi_0 d\tau$$

ist der Anfangszustand ψ_0 = ebene Welle + auslaufende Kugelwelle, der Endzustand ψ = ebene Welle + einlaufende Kugelwelle^{*)}. Im Matrixelement für die Paarerzeugung

$$M_P \sim \int \psi_2^* \alpha_2 \psi_1^* e^{i \vec{k} \vec{r}} d\tau$$

bilden das Positron ψ_1 und das Elektron ψ_2 den Endzustand, und beide haben eine einlaufende Kugelwelle. Dies bringt gegenüber

*) Zur Begründung siehe die Diskussion des Matrixelementes in BM, Abschnitt IV, und die Arbeit von Breit und Bethe, Phys. Rev. 93, 888 (1954). Anschaulich kann man sagen: Die einlaufende Kugelwelle muß genommen werden, damit die Austrittsrichtung des Elektrons eindeutig definiert ist.

der Bornschen Näherung, wo nur die ebenen Wellen benutzt werden, einen Unterschied in den differentiellen Wirkungsquerschnitten für Bremsstrahlung und Paarerzeugung.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt unter Vernachlässigung der Abschirmung und mit der Näherung für hohe Energien und kleine Winkel ist (siehe DBM, Gl. (1))

$$(3b.1) \quad d\mathcal{E}_{E_1, \mu, \nu, \phi} = - \frac{8\bar{\phi}}{2\pi} \left(\frac{\pi\alpha}{\alpha_{\text{lim}} \pi\alpha} \right)^2 \frac{E_1^2 dE_1}{q^3} \frac{\mu d\mu \nu d\nu d\phi}{q^4} \\ \left\{ V^2(z) \left[2\alpha (\mu^2 \xi^2 + \nu^2 \eta^2) - \xi \eta \left[2(1+\alpha^2) \mu \nu \cos \phi + (1+\alpha)^2 (\mu^2 + \nu^2) \right] \right] \right. \\ \left. + \alpha^2 \omega^2 W^2(z) \left[2\alpha (\mu^2 \xi^2 + \nu^2 \eta^2) + 2(1+\alpha^2) \mu \nu \xi \eta \cos \phi - (1+\alpha)^2 \left[1 - (\mu^2 + \nu^2) \xi \eta \right] \right] \right\}.$$

$V(z)$ und $W(z)$ haben dieselbe Bedeutung wie in 3a, und es ist

$$(3b.2) \quad z = 1 - \omega, \quad \omega = \xi \eta q^2, \quad \delta^2 \leq \omega \leq 1.$$

Bei der Bremsstrahlung wurde die Bethe-Heitler-Formel mit dem Faktor (3a.1) multipliziert; hier ist die Bethe-Heitler-Formel mit $\left[\frac{\pi\alpha}{\alpha_{\text{lim}} \pi\alpha} V(z) \right]^2$ multipliziert, und es treten zusätzlich Glieder mit $W^2(z)$ auf.

Die Schwierigkeiten bei der Integration rühren vom Argument z in den Funktionen V und W her. Während bei der Bremsstrahlung die Variablen $x = 1-y$, $y = \frac{\delta^2}{\xi \eta q^2}$ auftraten, sind die entsprechenden Variablen jetzt $z = 1-\omega$, $\omega = \xi \eta q^2$. Die Integration über die Funktionen V und W ist nur mit Hilfe der Differentialgleichung (3a.10) möglich, und wenn diese Integration nicht hoffnungslos kompliziert werden soll, muß das Argument der Funktionen V und W , also bei der Bremsstrahlung das x , bei der Paarerzeugung das z als Integrationsvariable genommen werden.

Andererseits sind durch die bei der Bornschen Näherung benutzte Integrationsmethode bestimmte Variable ausgezeichnet. Um das von ξ , η und ϕ abhängende q^4 im Nenner der Bethe-Heitler-Formel wegzubringen, wurde bei der Bornschen Näherung der Übergang $q \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow x$ durchgeführt. Nach der η -Integration sind ξ und $\mathcal{Q}$

unabhängig voneinander. Der Übergang $2 \rightarrow x$ ist für die Bornsche Näherung nicht notwendig. Weil aber bei der Coulomb-Korrektur für Bremsstrahlung schließlich doch das x eingeführt werden muß, haben wir dies schon in 1a. getan. Zur Berücksichtigung der Coulomb-Korrektur muß dann der Wirkungsquerschnitt aus 1a. mit dem Faktor (3a.1) multipliziert werden, und die Integration über x kann mit Hilfe der Differentialgleichung (3a.10) ausgeführt werden.

Bei der Paarerzeugung erfordert die Bornsche Näherung das x , die Coulomb-Korrektur das z als Integrationsvariable. Beide Forderungen lassen sich erfüllen durch eine von Bethe⁸⁾ stammende Methode, bei der getrennt über kleine und große Rückstoßimpulse integriert wird.

Zwischen x und z besteht die aus den Gl. (3b.2) und (1b.9) folgende Beziehung

$$(3b.3) \quad 2 + \delta^2 = \omega, \quad y = \frac{\delta^2}{\delta^2 + 2}, \quad x = 1 - y, \quad z = 1 - \omega.$$

Wir unterteilen das Intervall $\delta^2 \leq \omega \leq 1$ durch ein w_1 mit $\delta^2 \ll w_1 \ll 1$ in

$$\text{Gebiet A: } \delta^2 \leq \omega < w_1, \quad q_x^2 = q_{x1}^2 + \frac{\delta^2}{\xi \eta}, \quad \omega = 2 + \delta^2, \quad \frac{\delta^2}{w_1} \ll 1$$

$$\text{Gebiet B: } w_1 \leq \omega \leq 1, \quad q_x^2 \approx q_{x1}^2, \quad \omega \approx 2, \quad w_1 \ll 1.$$

Diese Unterteilung gestattet in A die Vernachlässigung der Coulomb-Korrektur, in B eine Approximation im Rückstoßimpuls. Bei der Addition der Teilergebnisse, $d\sigma = d\sigma^A + d\sigma^B$, fällt das w_1 heraus.

Wegen $w < w_1 \ll 1$ kann in A $V(z) \approx V(1) = \frac{f_{j\mu\bar{u}a}}{r\alpha}$ gesetzt und $wV(z) \approx -\frac{f_{j\mu\bar{u}a}}{r\alpha} \omega \log \omega$ vernachlässigt werden; dies liefert die Bethe-Heitler-Formel (1b.10). Wir integrieren über η und erhalten (siehe hierzu Gl. (1a.12))

$$d\sigma_{E_1, \xi, 2}^A = 2\bar{\phi} \frac{E_1^2 dE_1}{k^3} \left\{ 2[1 + \alpha^2 + 4\alpha\xi(1-\xi)] + 2\alpha^2[1 - 6\xi(1-\xi)] \right\} \frac{d\omega d\xi}{(\delta^2 + 2)^2}.$$

Die $\mathcal{R}$ -Integration geht nach Gl. (3b.3) über $0 \leq \mathcal{R} < \omega_1 - \delta^2$.
Der Übergang zum x von Gl. (1b.11) ergibt (siehe Gl. (1a.14))

$$d\mathcal{B}_{E_1, \xi, x}^A = 2\bar{\phi} \frac{E_1^2 dE_1}{R^3} \left\{ 1 + \alpha^2 + 4\alpha\xi(1-\xi) + \frac{2\alpha\delta^2 x}{1-x} [1 - 6\xi(1-\xi)] \right\} \frac{x dx}{1-x} d\xi$$

mit $0 \leq x < 1 - \frac{\delta^2}{\omega_1}$. Die x -Integration wird wie in (1a.15 und 16) ausgeführt und liefert (unter Vernachlässigung derselben Glieder wie in 1a.)

$$\int_0^{1-\delta^2/\omega_1} \frac{x dx}{1-x} \approx -\log \frac{\delta^2}{\omega_1} - 1, \quad \int_0^{1-\delta^2/\omega_1} \frac{x^2 dx}{(1-x)^2} \approx \omega_1.$$

Hiermit wird

$$d\mathcal{B}_{E_1, \xi}^A = 2\bar{\phi} \frac{E_1^2 dE_1}{R^3} \left\{ [1 + \alpha^2 + 4\alpha\xi(1-\xi)] [-\log \delta^2 + \log \omega_1 - 1] + 2\alpha\omega_1 [1 - 6\xi(1-\xi)] \right\} d\xi.$$

Im Gebiet B ist $\omega \approx \mathcal{R}$. Wenn wir in (3b.1)

$$-2\mu\theta\xi\eta\cos\phi = \xi + \eta - 2\xi\eta - \omega \quad \text{und} \quad \frac{1}{q^2} \approx \frac{\xi\eta}{\omega}$$

(s. Gl. (1b.8 und 9)) einsetzen, wird

$$d\mathcal{B}_{E_1, \xi, \eta, \omega}^B = \frac{4\bar{\phi}}{2\pi} \left(\frac{\pi\alpha}{q_{\text{lim}}^2 \pi\alpha} \right)^2 \frac{E_1^2 dE_1}{R^3} \frac{d\xi d\eta d\omega}{\sqrt{-(\xi-\eta)^2 + 2\omega(\xi+\eta-2\xi\eta) - \omega^2}} \left\{ \frac{V^2(\eta)}{\omega^2} [\omega(1+\alpha^2) + 2\alpha(\xi-\eta)^2] + \alpha^2 W^2(\eta) [(1+\alpha^2) - \omega(1+\alpha^2) - 2\alpha(\xi+\eta)(2-\xi-\eta)] \right\}.$$

Bei der η -Integration tritt neben den auf S. 9 angegebenen Integralen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ das Integral

$$\mathcal{H}_3 = \int \frac{(\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}{\sqrt{\dots}} d\eta = \pi \left\{ 4\xi(1-\xi) + 2\omega[1-5\xi(1-\xi)] - \omega^2[1-6\xi(1-\xi)] \right\}$$

auf. Hiermit erhält man

$$d\mathcal{B}_{E_1, \xi, z}^B = 2\bar{\phi} \left(\frac{\pi\alpha}{q_{\text{lim}}^2 \pi\alpha} \right)^2 \frac{E_1^2 dE_1}{R^3} \left\{ [1 + \alpha^2 + 4\alpha\xi(1-\xi)] \left[\frac{V^2(z)}{1-z} + \alpha^2 z W^2(z) \right] + 2\alpha [1 - 6\xi(1-\xi)] [V^2(z) + \alpha^2 z^2 W^2(z)] \right\} dz d\xi$$

mit $0 \leq z \leq 1 - \omega_1$. Die z -Integration wird wie in (3a.11) ausgeführt und ergibt (unter Vernachlässigung derselben Glieder wie in 3a.)

$$\int_0^{1-\omega_1} \left[\frac{V^2(z)}{1-z} + \alpha^2 z W^2(z) \right] dz = z V W \Big|_0^{1-\omega_1} \approx - \left(\frac{q_{\text{lim}}^2 \pi\alpha}{\pi\alpha} \right)^2 [2\ell(z) + \log \omega_1]$$

und

$$\int_0^{1-w_A} [V^2(\xi) + \alpha^2 \xi^2 W^2(\xi)] d\xi = \left[\xi V^2 - \xi^2 (1-\xi) \alpha^2 W^2 \right] \Big|_0^{1-w_A} \approx \left(\frac{18 \lambda M \alpha}{\pi} \right)^2 [1-w_A],$$

so daß

$$d\mathcal{B}_{E_A, \xi}^B = 2\bar{\phi} \frac{E_A^2 dE_A}{k^3} \left\{ [1 + \alpha^2 + 4\alpha \xi (1-\xi)] [-2f(\xi) - \log w_A] + 2\alpha [1 - 6\xi(1-\xi)] [1-w_A] \right\}$$

wird.

Die Addition von $d\mathcal{Z}^A$ und $d\mathcal{Z}^B$ ergibt

$$(3b.4) \quad d\mathcal{Z}_{E_A, \xi} = 2\bar{\phi} \frac{E_A^2 dE_A}{k^3} \left\{ (1+\alpha^2)(3-2T) + 2\alpha [1 - 4\xi(1-\xi)T] \right\} d\xi$$

mit

$$T = \log \delta + 2 + f(\xi).$$

Schließlich muß noch die Abschirmungskorrektur addiert werden.

Bei kleiner Impulsübertragung, $q \ll 1$, Gebiet A, gilt die Bethe-Heitler-Formel. Die Coulomb-Korrektur tritt erst für $q = 0(1)$ auf. Da die Abschirmung nur für $q \ll 1$ von Einfluß ist, können (im Gegensatz zur Bremsstrahlung) schon im differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\mathcal{Z}_{E_A, \Theta_A, \Theta_A, \phi}$ Abschirmungs- und Coulomb-Korrektur getrennt behandelt werden, indem man, wie es bei der Bornschen Näherung erlaubt ist, den Wirkungsquerschnitt mit $[1-F(q)]^2$ multipliziert.

Mit Abschirmung gilt das T von Gl. (3a.13). Mit μ als Variable und dem Atomformfaktor (2a.13) ist

$$(3b.5) \quad d\mathcal{Z}_{E_A, \mu} = 4\bar{\phi} \frac{E_A^2 dE_A}{k^3} \left\{ (1+\alpha^2)(3-2T) + 2\alpha [1 - 4\xi^2 \mu^2 T] \right\} \xi^2 \mu d\mu$$

mit

$$(3b.6) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \log(\delta^2 + \beta_i^2 \xi^2) + 2 + f(\xi), \quad \beta_i = \frac{\sqrt[3]{k}}{C_i}, \quad C_1 = 233, \quad C_2 = 52,6 \\ \delta &= \frac{k}{2E_A(k-E_A)}, \quad \alpha = \frac{k-E_A}{E_A}, \quad \mu = E_A \Theta_A, \quad \xi = \frac{1}{1+\mu^2}. \end{aligned} \right.$$

Trotz den verschiedenen differentiellen Wirkungsquerschnitten für Bremsstrahlung und Paarerzeugung entsprechen die Gl. (3b.4 und 5) genau den Gl. (3a.12 und 14), wenn man die Substitutionen (2b.1) vornimmt. Dies ist die Folge eines Satzes von Olsen²⁰, nach dem zur Berechnung von $d^2\sigma_{R,\xi}$ für die Wellenfunktion ψ des auslaufenden Elektrons ein beliebiges (vollständiges) Funktionssystem benutzt werden darf; insbesondere darf für ψ die gewöhnliche Streufunktion mit auslaufender Kugelwelle genommen werden. Dies führt zu ähnlichen Verhältnissen wie bei der Paarerzeugung: Beide Elektronenzustände enthalten auslaufende Kugelwellen. Man erhält zunächst einen zu (3b.1) analogen differentiellen Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma_{R,\xi,\eta,\phi}$, der falsch ist. Der nach der Integration über alle Richtungen des auslaufenden Elektrons resultierende Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma_{R,\xi}$ jedoch stimmt mit (3a.12) überein. Dies ist auch der Grund dafür, daß die Abschirmung in $d^2\sigma_{R,\xi}$ getrennt von der Coulomb-Korrektur behandelt werden darf. In dem falschen $d^2\sigma_{R,\xi,\eta,\phi}$ tritt die Coulomb-Korrektur wie bei der Paarerzeugung bei großen q auf und ist unabhängig von der Abschirmung. Multiplikation mit $[1 - F(q)]^2$ und Integration liefern dann den richtigen Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma_{R,\xi}$ mit Abschirmung.

Die Gl. (3b.5) gibt die Winkelverteilung für das Positron. Da der differentielle Wirkungsquerschnitt symmetrisch in μ und ν ist, gilt dieselbe Gleichung für $d^2\sigma_{E,\nu}$. (Im Gegensatz zur Bremsstrahlung, wo man aus (3a.14) zwar ein $d^2\sigma_{R,\nu}$ erhält, das aber wegen der Definition des Winkels Θ nicht die Winkelverteilung der gebremsten Elektronen liefert.)

Die μ -Integration in (3b.5) ergibt für die Energieverteilung $d^2\sigma_{E,\mu}$ dieselben Formeln, die man mit den Substitutionen (2b.1) aus (3a.16 und 17) erhält, so daß wir uns die Angabe des $d^2\sigma_{E,\mu}$ ersparen können.

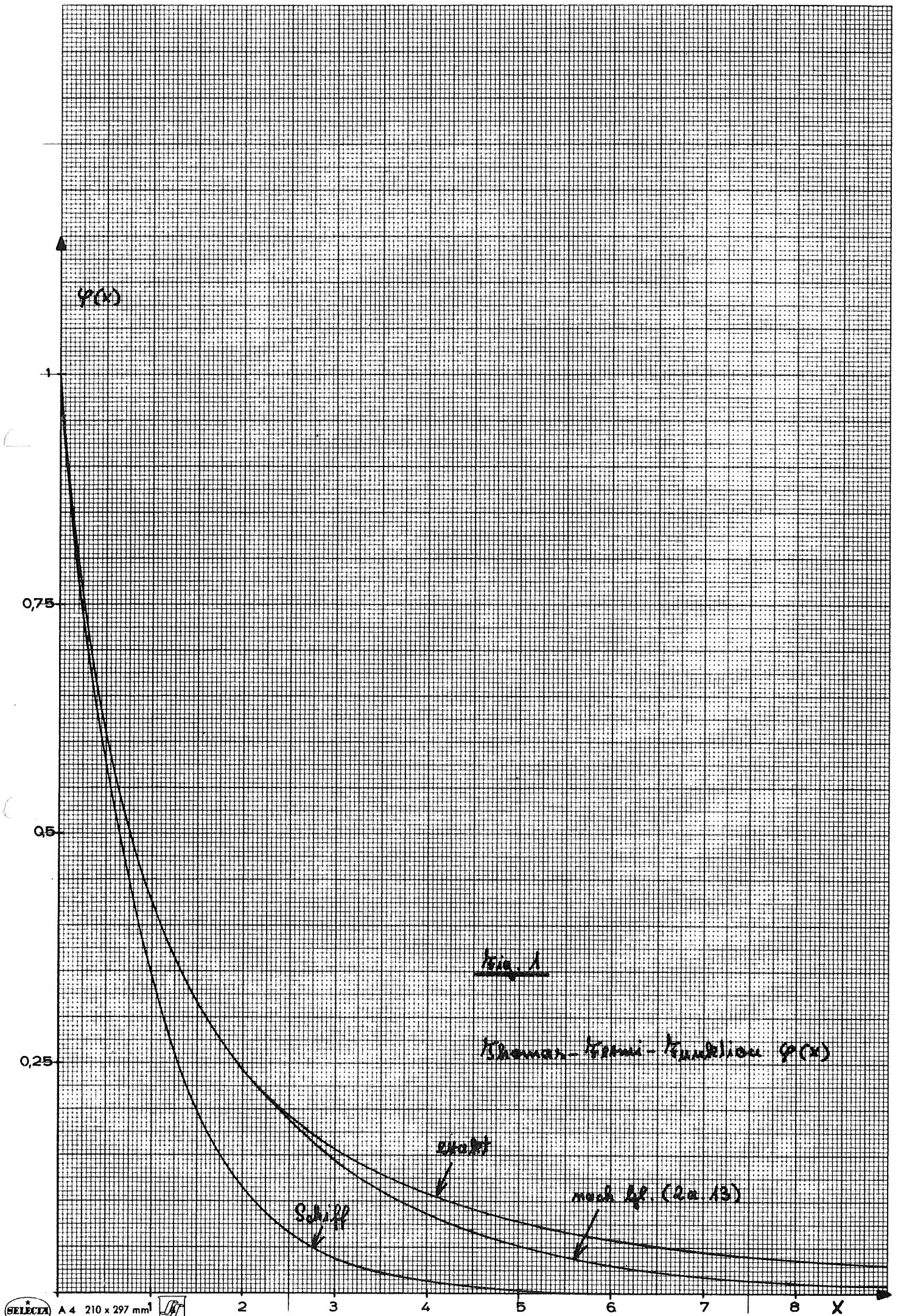
In den Fig. 10-14 sind die Wirkungsquerschnitte für Blei angegeben, u. z. in

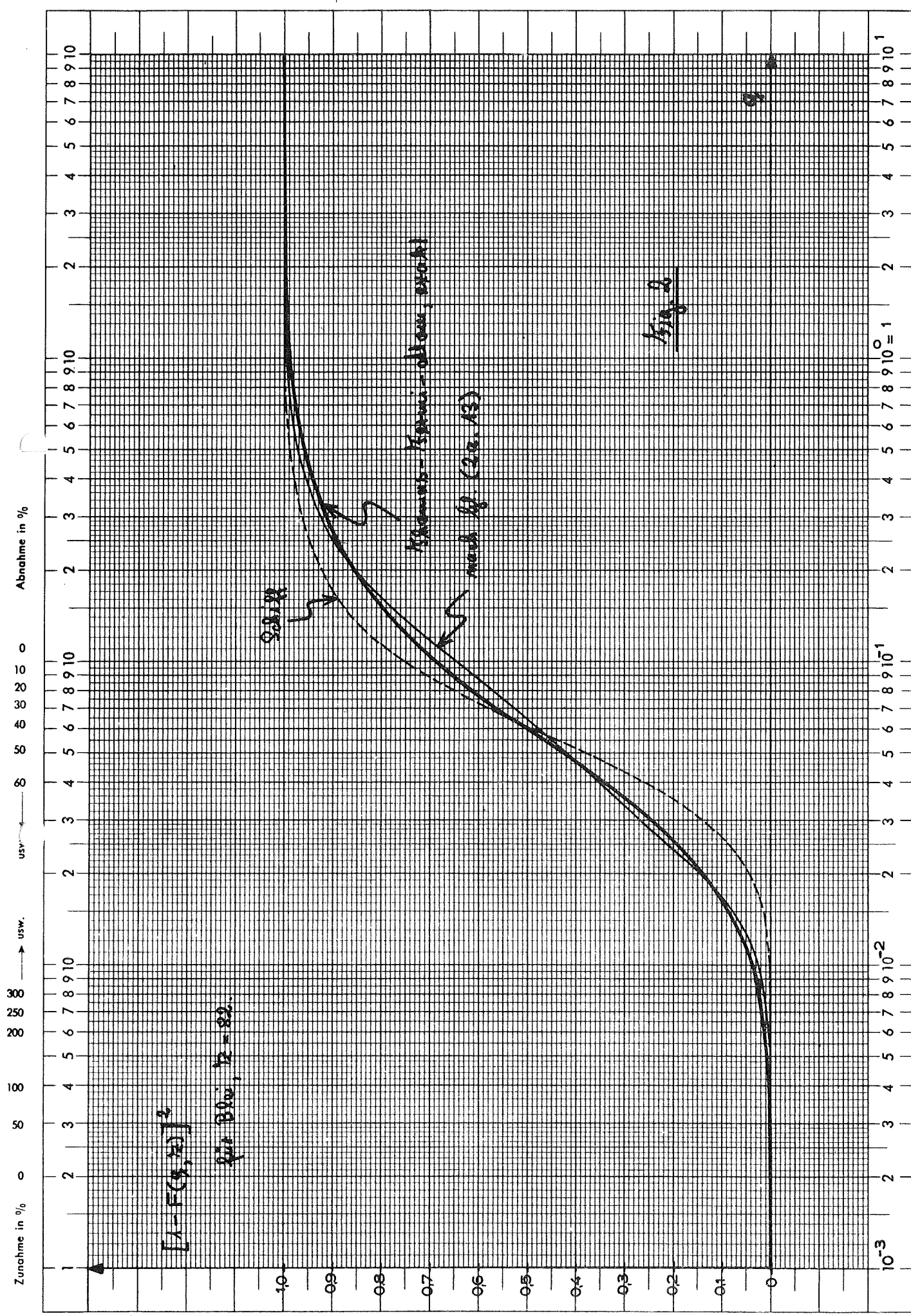
Fig. 10 und 11: $\frac{k-2}{\phi} \frac{d^2 E_{A,\mu}}{dE_A d\mu}$ für $k = 6$ GeV

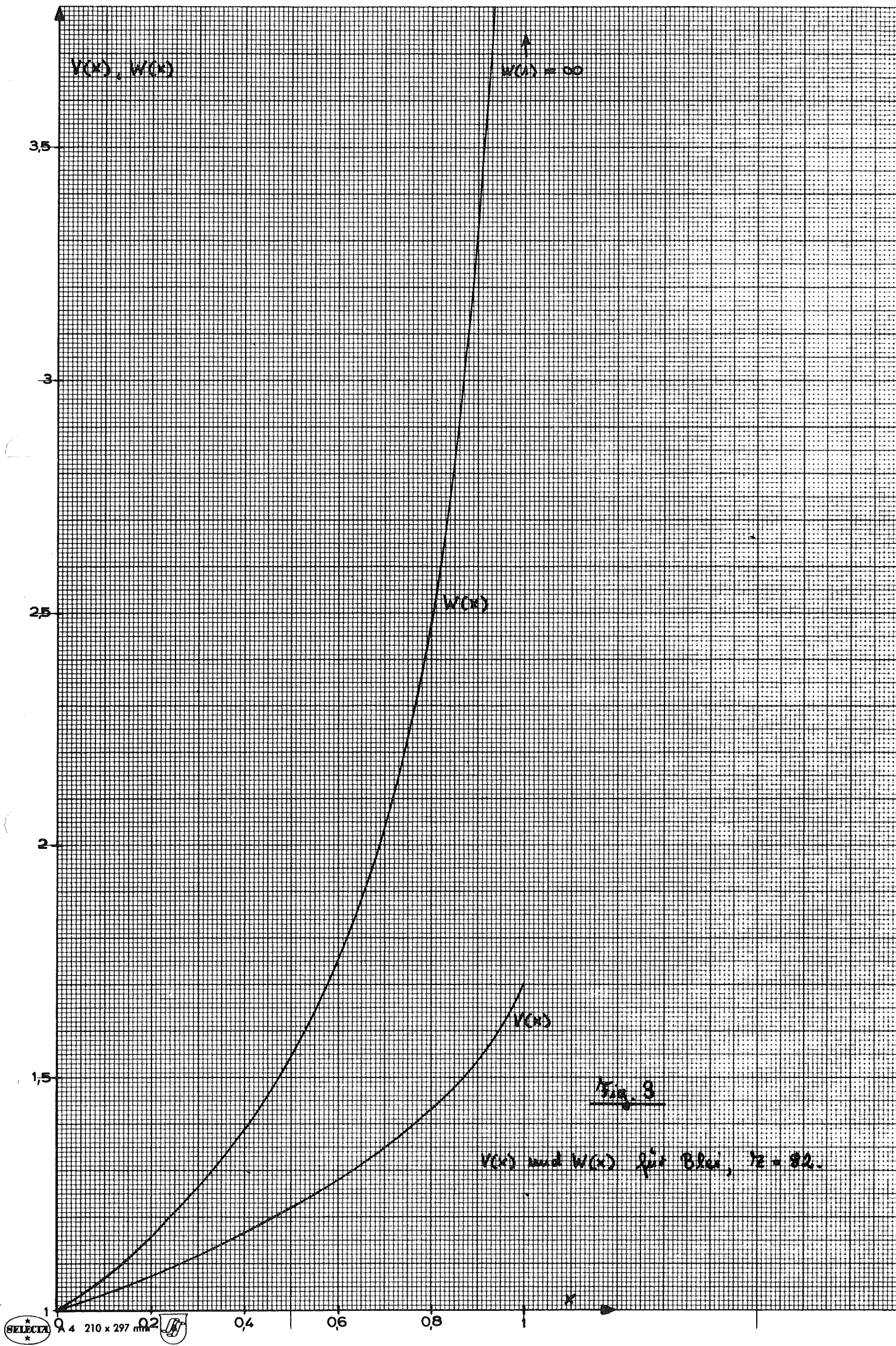
Fig. 12: $\frac{k-2}{\phi} \frac{d^2 E_A}{dE_A}$ für $k = 1$ GeV und 6 GeV

Fig. 13: $\frac{2}{\phi} = \frac{1}{\phi} \int d^2 E_A$ (numerische Integration)

Fig. 14: $\sim \frac{d^2 E_{A,\mu}}{dE_A d\mu} \sim \frac{d^2 E_{A,\mu}}{dE_A d\mu}$ (bezogen auf den Raumwinkel, Ordinate in willkürlichen Einheiten).







$f(\tau)$

0.4

0.3

0.2

0.1

Fig. 4

Coulomb - Henschel function $f(\tau)$

$\frac{1}{2}$

$\frac{k}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\mu^2}$, für Blei, $Z=82$

--- ohne Coulomb-Korrektur
 — mit "
 $x = \frac{k}{E_0} = \frac{k}{E_0 - 1}$ (k und E_0 in m.e.^2)

$x=0$
 $x=0,8$
 $x=0,5$

Fig. 5

$\frac{k}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\mu^2}$ nach Gl. (3a.14)

$E_0 = 6 \text{ GeV}$

$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} \cdot 10^4$
 $\frac{d\sigma_{\text{tot}}}{d\Omega}$

für Blü,
 $Z = 82$

$E_0 = 6 \text{ GeV}$

--- ohne Coulomb - Korrektur
 --- mit

$\mu = 0.5$

$\mu = 0.6$

$\mu = 1$

$\mu = 1$

$\mu = 0.95$

$\mu = 0.95$

$\mu = 1.5$

$\mu = 1.5$

$\mu = 0.125$

$\mu = 0.125$

$\mu = 3$

$\mu = 6$

Fig. 6

$$x = \frac{R}{T_0} = \frac{R}{E_0 - 1}$$



$\frac{R}{\phi} \frac{d\phi}{dR}$

für Blei,
 $Z = 82$

Fig. 4

ohne Coulombs - Korrektur, $f(z) = 0$

$\frac{R}{\phi} \frac{d\phi}{dR}$ nach Eq. (3a.16)

$E_0 = 6 \text{ GeV}$

6 GeV

$E_0 = 1 \text{ GeV}$

1 GeV

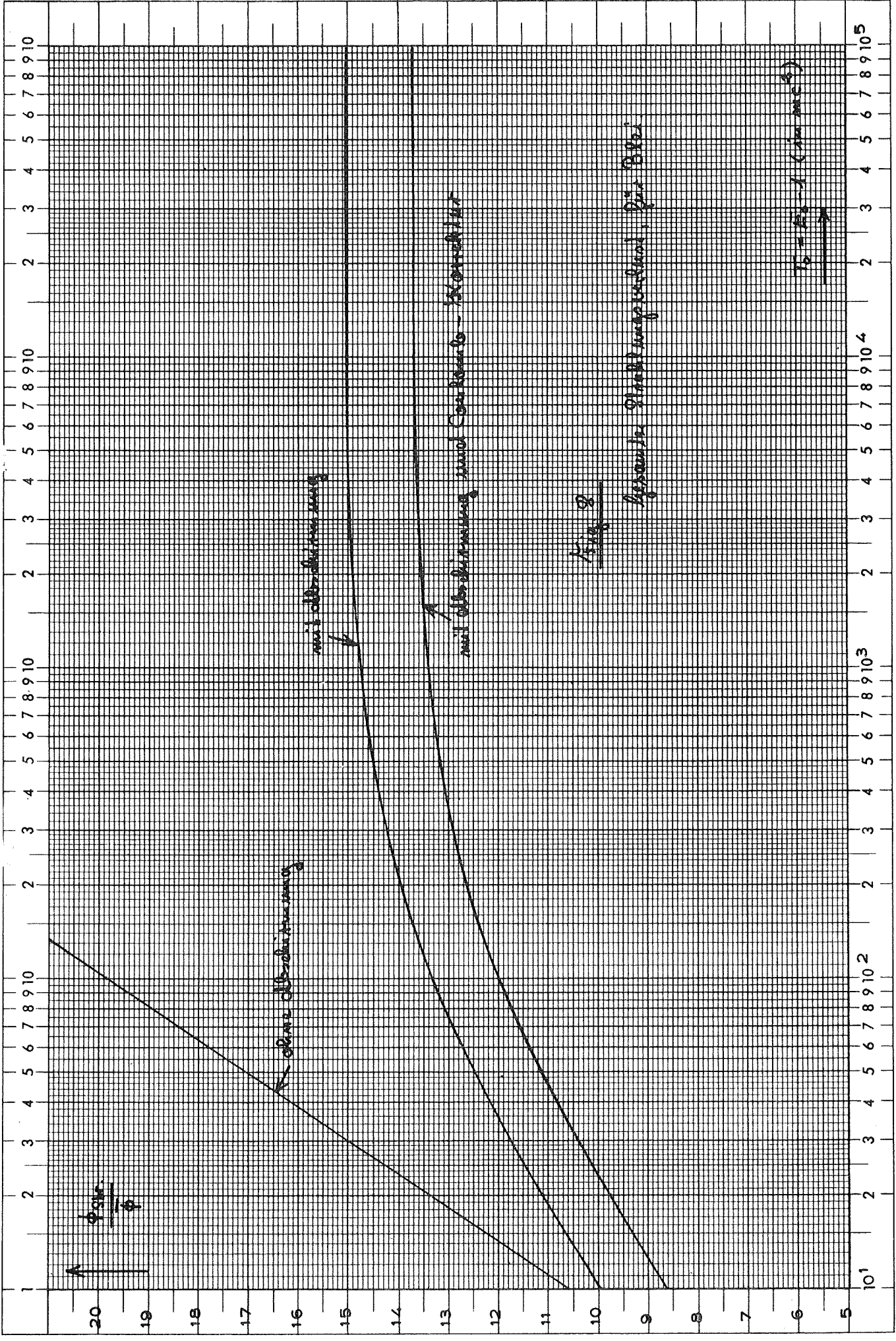
nach Schupp, 1. Aufl.

mit Coulombs - Korrektur

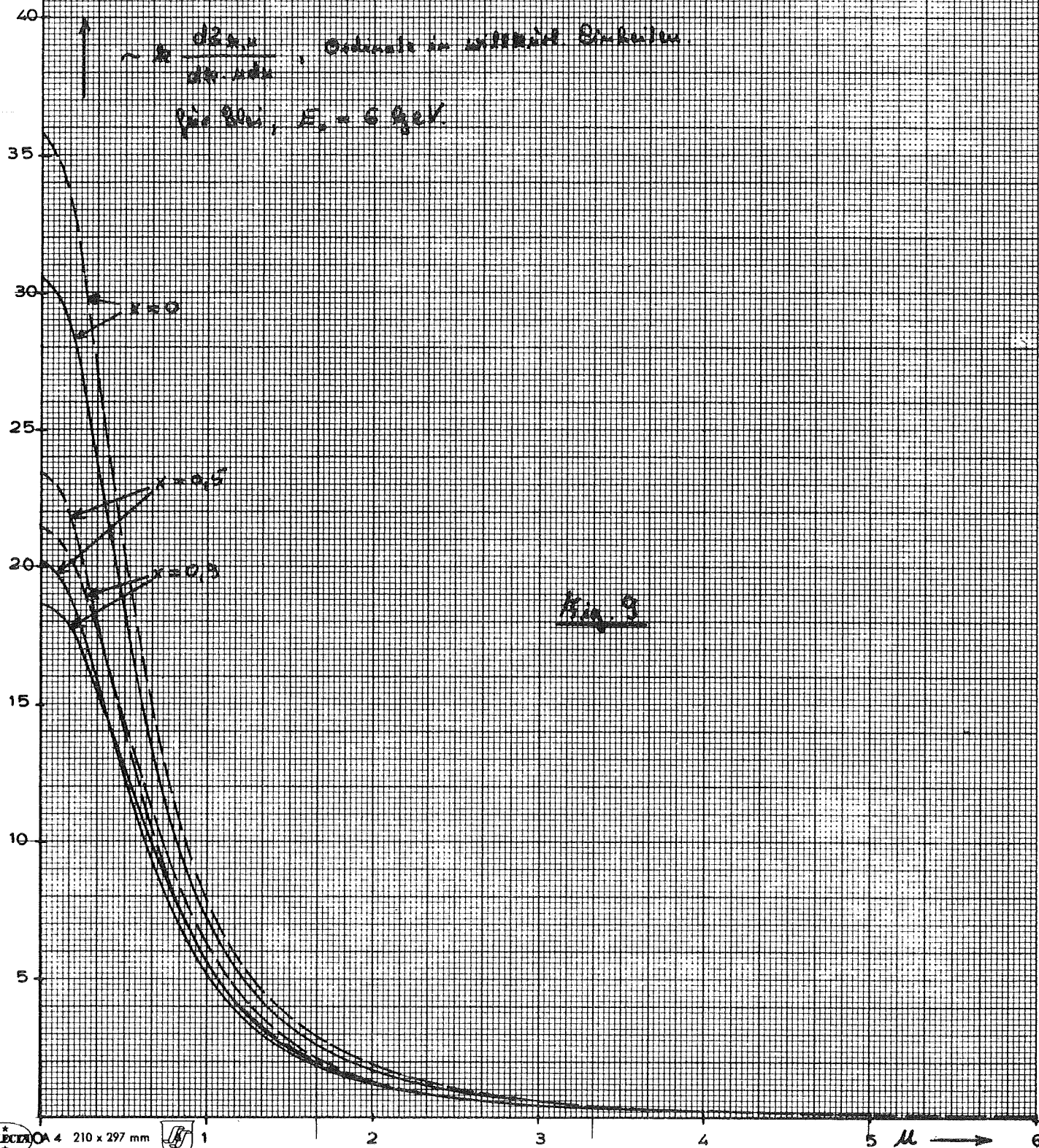
$\chi = \frac{R}{r_0} = \frac{R}{E_0 - 1}$

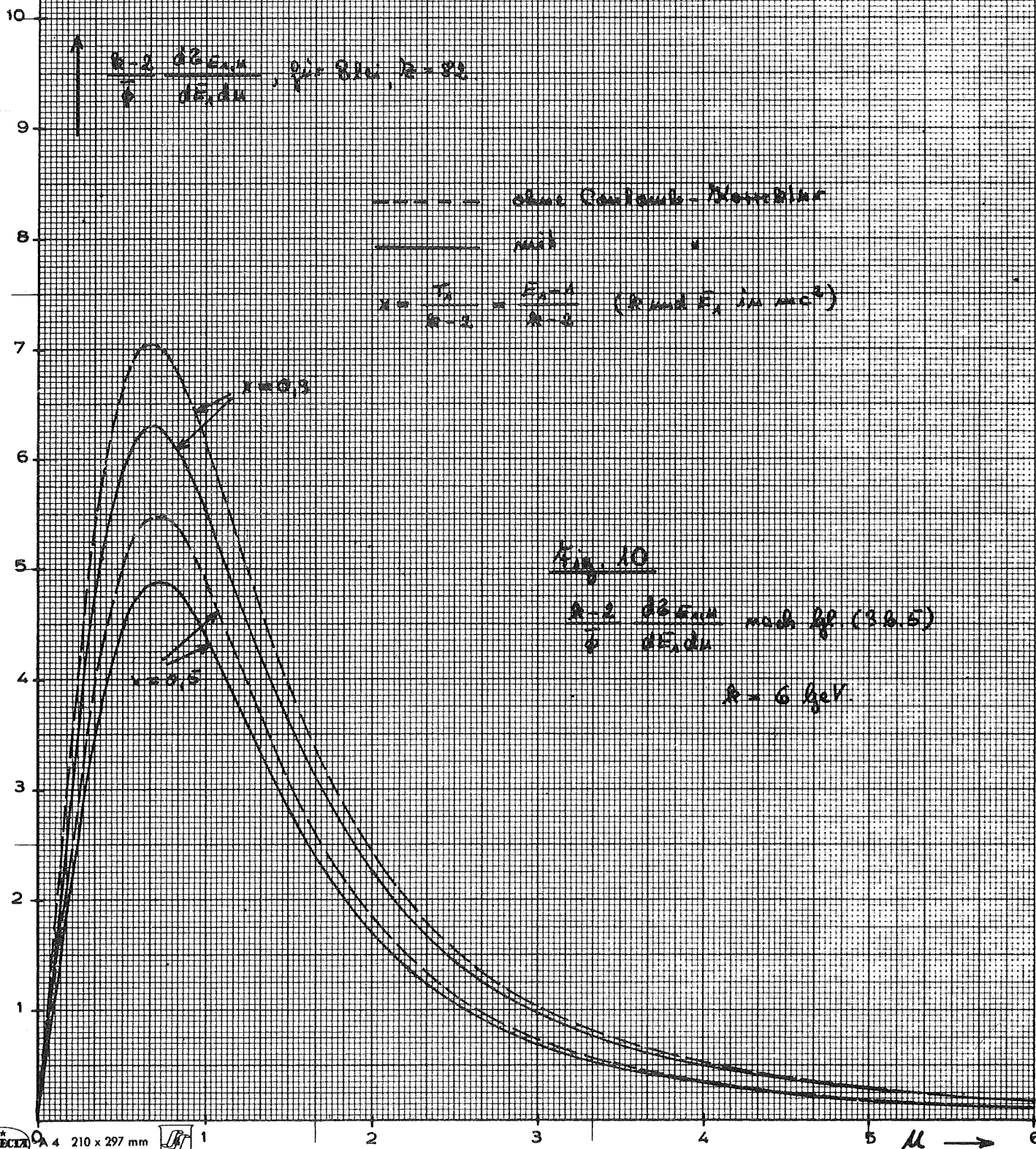
Zunahme in % 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 200 250 300 usw. →

Abnahme in % ← 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100



$\sim \frac{d^2 \alpha_{\mu}}{d\mu^2}$, Ordinate in unternormierten Einheiten
 für 80° , $E_0 = 5 \text{ GeV}$







$$\frac{A-2}{\bar{p}} \frac{d^2 E_{\text{rel}}}{dE_{\text{rel}} d\Omega}$$

$\rho_{\text{rel}} \approx 0.8$

$z = 82$

$A = 6 \text{ GeV}$

--- ohne Coulomb-Korrektur
— mit

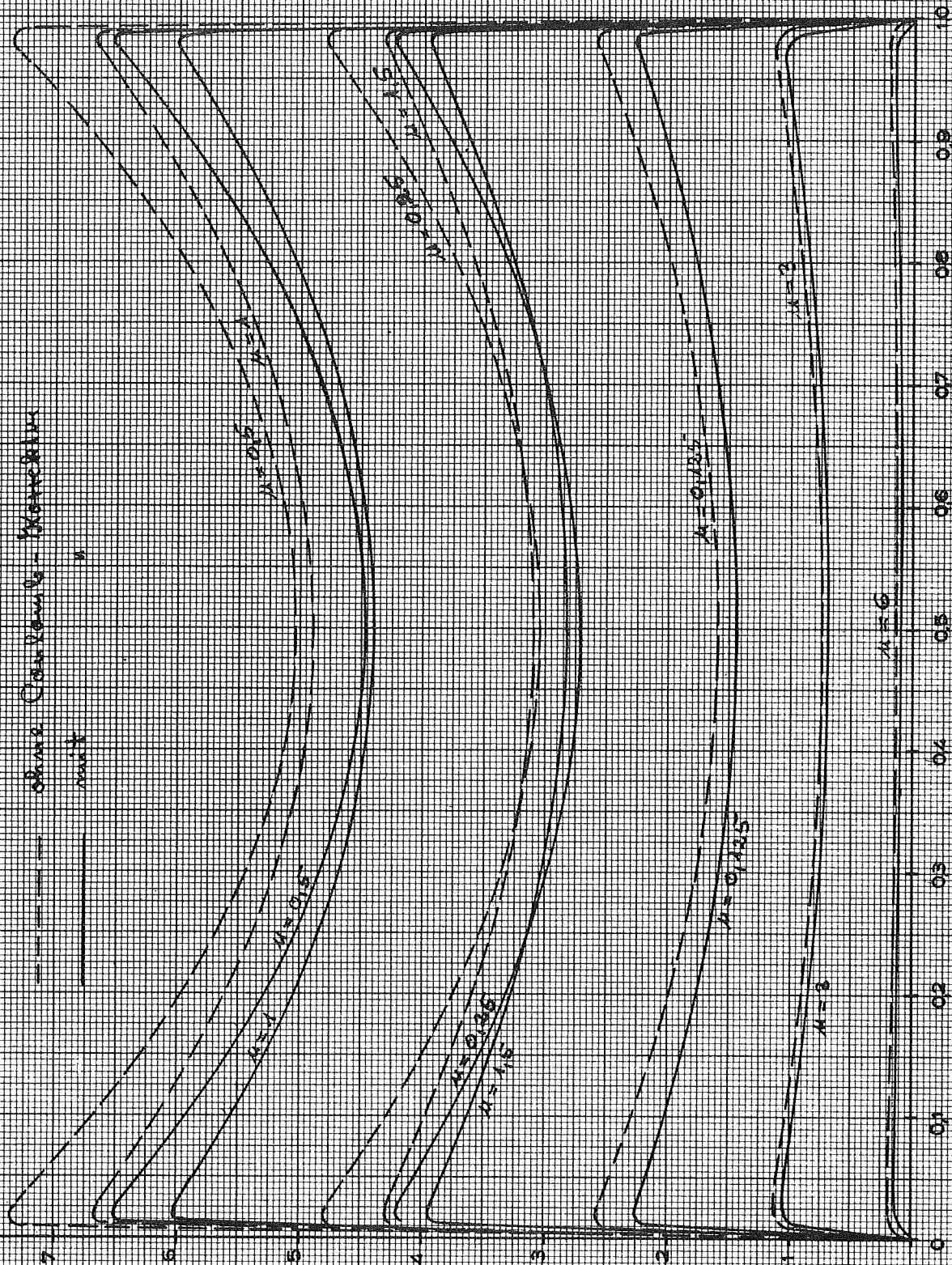


Fig. 11

$$x = \frac{T_1}{R-2} = \frac{E-1}{R-2}$$

$$\frac{k-2}{\phi} \frac{d\phi}{dE_1}$$

für 800i,
R=82.

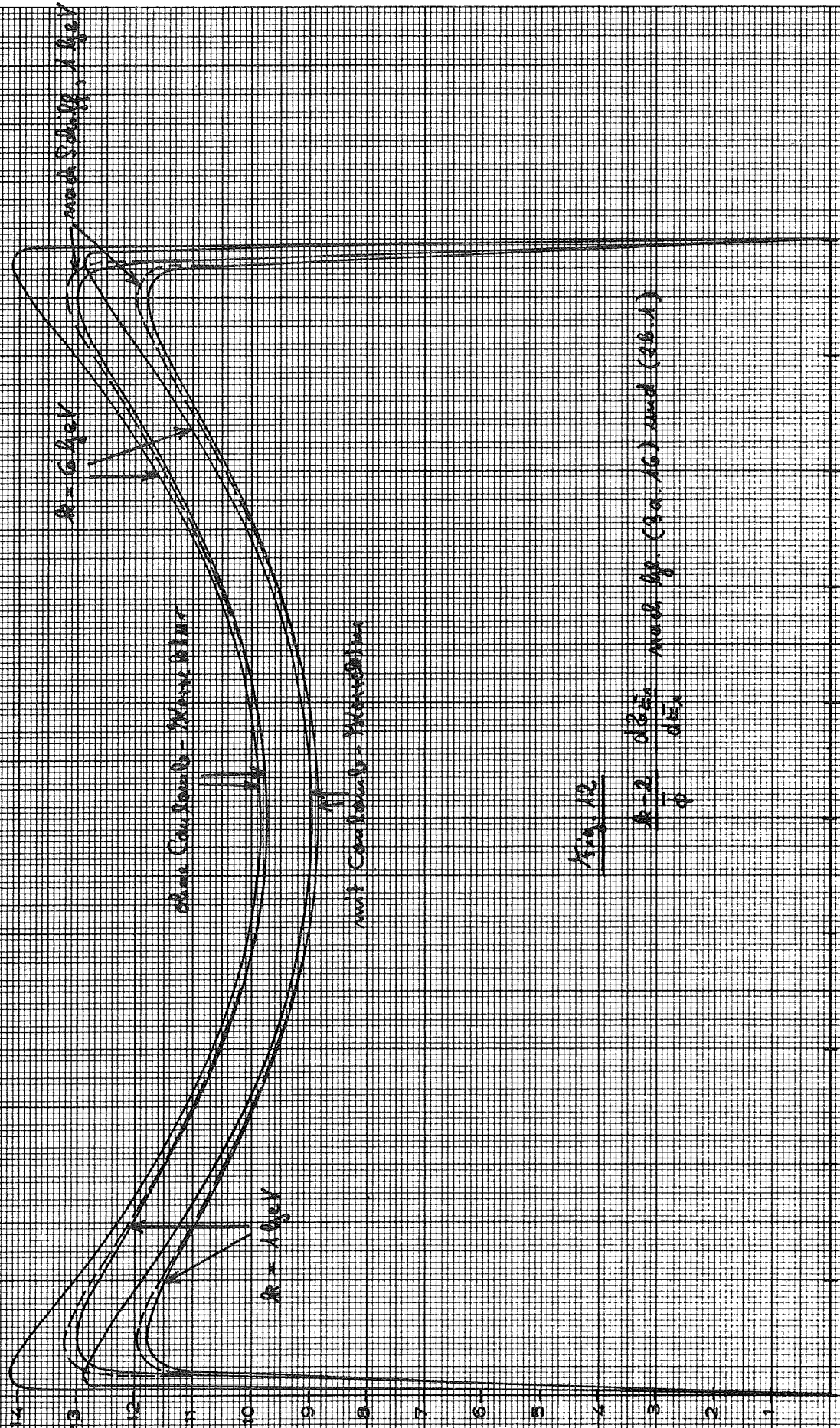
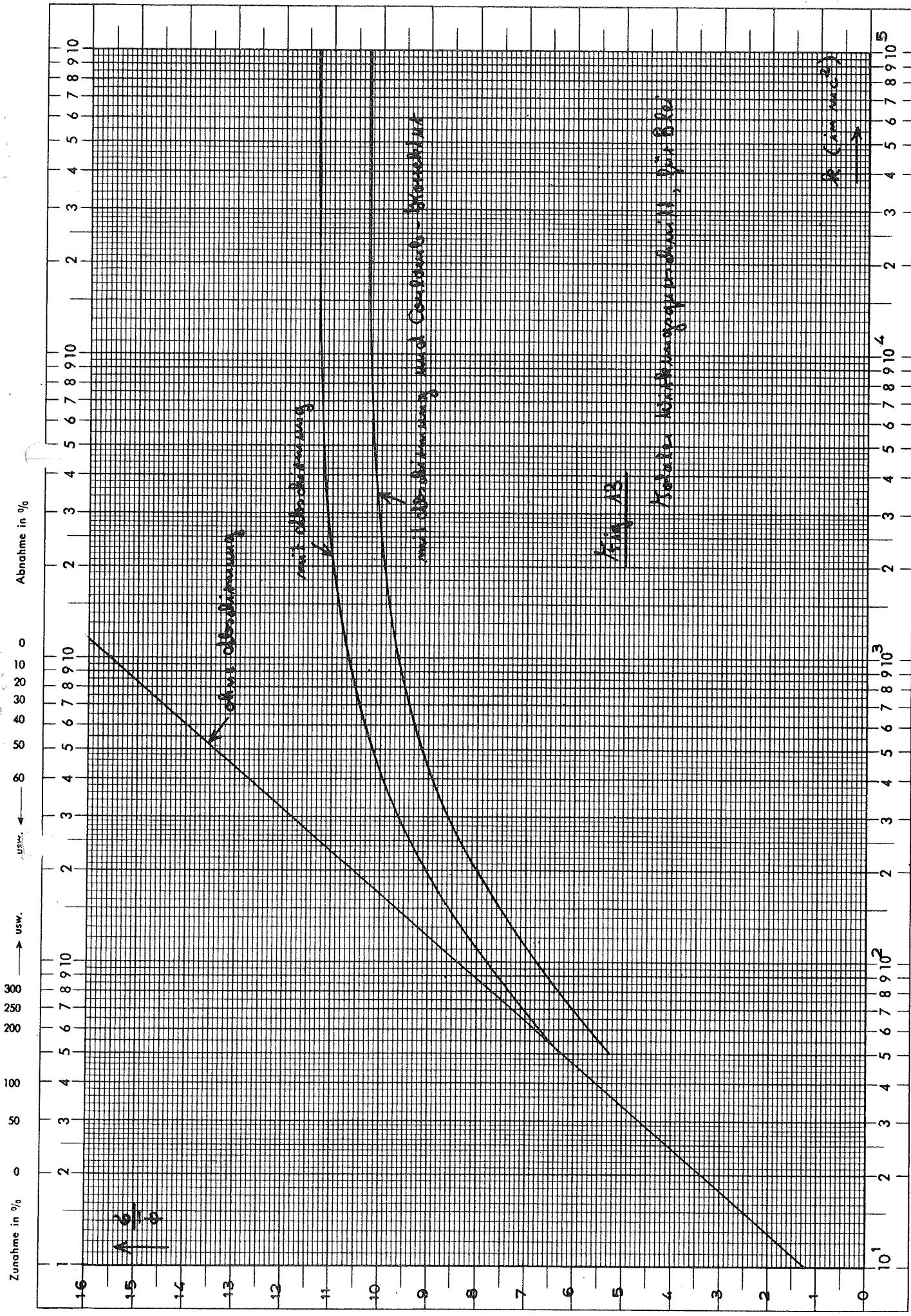


Fig. 12

$$\frac{k-2}{\phi} \frac{d\phi}{dE_1} \text{ nach Gg. (2a.16) und (2b.1)}$$

$$x = \frac{T_2}{R-2} = \frac{E_1-1}{R-2}$$



$\sim \frac{d^2 E_{\mu\mu}}{dE_{\mu\mu}} \text{, Ordinate in willkür. Einheiten}$

für $B_{\mu\mu}$, $k = 6 \text{ GeV}$

$x = 0,9$

$x = 0,5$

Fig. 14

