



UNIVERSITÄT HAMBURG
DEPARTMENT PHYSIK

DIPLOMARBEIT

Parameterbestimmung supersymmetrischer Modelle am LHC

unter Einbeziehung systematischer Unsicherheiten

Verfasser:
Björn SARRAZIN

Erstgutachter:
Dr. Philip BECHTLE

Zweitgutachter:
Prof. Dr. Gudrid
MOORTGAT-PICK

16.04.2011

Abstract

In this thesis the implications of a non-observation of new physics in the four jets and zero lepton channel at the LHC at 7 TeV center-of-mass-energy with 35 pb^{-1} integrated luminosity as well as the possible non-observation with 1 to 7 fb^{-1} integrated luminosity are studied for the mSUGRA model, including the effect of systematic uncertainties. Therefor global fits are performed within the framework Fittino combining low-energy data with current as well as with potential LHC exclusions. It is found that the non-observation of new physics even with 7 fb^{-1} would still lead to an acceptable description of low-energy-measurements by mSUGRA, while already the non-observation with 1 fb^{-1} would exclude squark and gluino masses below 1 TeV.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Auswirkungen der Nicht-Entdeckung neuer Physik im vier Jets, null Leptonen Kanal am LHC bei einer Schwerpunktsenergie von 7 TeV mit 35 pb^{-1} integrierter Luminosität sowie der möglichen Nicht-Entdeckung mit 1 bis 7 fb^{-1} integrierter Luminosität in Bezug auf das mSUGRA-Modell untersucht. Systematische Unsicherheiten fließen in die Deutung mit ein. Dazu werden innerhalb des Fittino-Frameworks globale Fits durchgeführt, die Niedrig-Energie-Messungen mit derzeitigen sowie mit möglichen LHC-Ausschlüssen kombinieren. Es ergibt sich, dass eine Nicht-Beobachtung neuer Physik auch mit 7 fb^{-1} noch zu einer akzeptablen Beschreibung der Niedrig-Energie-Messungen durch mSUGRA führen würde, während bereits die Nicht-Beobachtung mit 1 fb^{-1} Squark- und Gluinomassen unter 1 TeV ausschließen würde.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	vii
Tabellenverzeichnis	xi
1 Einleitung	1
2 Modelle	3
2.1 Symmetrien	3
2.1.1 Raum - Zeit - Symmetrien	4
2.1.2 Interne Symmetrien	8
2.1.3 Supersymmetrie	10
2.2 Das Standardmodell	13
2.2.1 Definition des Standardmodells	13
2.2.2 Physikalische Zustände des SM	16
2.3 Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell	18
2.3.1 Motivation	18
2.3.2 Definition des MSSM	20
2.3.3 Physikalische Zustände des MSSM	23
3 Observablen	27
3.1 Relikt-Dichte Dunkler Materie	27
3.1.1 Evidenz für Dunkle Materie	28
3.1.2 Das kosmologische Standardmodell	28
3.1.3 Kandidaten für Dunkle Materie	30
3.1.4 Dunkle Materie im mSUGRA-Modell	32
3.2 Niedrig-Energie-Observablen	33
3.2.1 Anomales magnetisches Moment des Muons	35
3.2.2 K- und B-Physik	38
3.2.3 Messungen bei der Z-Resonanz	43
3.2.4 W-Masse und Higgsmassenlimit	45
3.3 LHC-Observablen	45
3.4 Computer-Codes	47

4 Die statistische Methode	55
4.1 Grundlegende Begriffe	56
4.2 Parameterschätzungen	58
4.2.1 Punktschätzungen	58
4.2.2 Bereichsschätzungen	59
4.3 Hypothesentests	60
4.4 Güte des Fits	61
4.5 Das Framework Fittino	62
5 Ergebnisse	65
5.1 Fit mit Niedrig-Energie-Messungen	65
5.1.1 Best-Fit-Punkt, \mathcal{P} -Wert und Pull-Verteilung	65
5.1.2 Zweidimensionale Konfidenzbereiche	66
5.1.3 Massenspektrum	68
5.2 Fits unter Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC	68
5.2.1 Best-Fit-Punkte, \mathcal{P} -Werte und Pull-Verteilungen	68
5.2.2 Zweidimensionale Konfidenzbereiche	72
5.2.3 Massenspektren	75
6 Schlussfolgerung	83
Literaturverzeichnis	85
Danksagung	89
Selbständigkeitserklärung	91

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schleifendiagramme, die zur Higgsmasse beitragen	19
2.2	Abhängigkeit der effektiven Kopplungen von der Energieskala im Standardmodell sowie im MSSM (aus [1])	21
3.1	Konfidenzbereiche von 68.3%, 95.4% und 99.7% in der $\Omega_\Lambda - \Omega_M$ - Ebene, wie sie sich aus der Mikrowellenhintergrundstrahlung sowie Beobachtungen von Supernovae und Galaxien ergeben (aus [1])	31
3.2	Tree - Level - Diagramme von in verschiedenen mSUGRA - Parameterbereichen relevanten Annihilationsprozessen des χ_1^0	35
3.3	Schematische Darstellung von mSUGRA - Parameterbereichen, die aufgrund unterschiedlicher Annihilationsmechanismen mit der beobachteten Relikt - Dichte verträglich sind (aus [2]).	36
3.4	Teilchenzahldichte eines WIMPs in Abhängigkeit vom Verhältnis seiner Masse zur Temperatur entsprechend dem Gleichgewichtszustand (durchgezogene Linie) sowie unter Berücksichtigung eines Freeze-out-Punktes aufgrund der Expansion des Universums (gestrichelte Linie) (aus [3]).	37
3.5	Supersymmetrische Schleifendiagramme, die zum anomalen magnetischen Moment des Myons beitragen.	38
3.6	Ergebnisse für die Differenz $a_\mu^{\text{SM}} - a_\mu$ verschiedener Kollaborationen zu verschiedenen Zeitpunkten innerhalb der letzten Jahre (aus [4]).	39
3.7	Box - Diagramme der $K^0 - \bar{K}^0$ - Oszillation im Standardmodell	42
3.8	Box - Diagramme der $B_q - \bar{B}_q$ - Oszillation im Standardmodell, mit $q = s, d$. 42	
3.9	Box - Diagramme der $K^0 - \bar{K}^0$ - Oszillation in supersymmetrischen Theorien 43	
3.10	Supersymmetrische Feynman - Diagramme, die zum $Zf\bar{f}$ - Vertex beitragen 45	
3.11	Verteilung der effektiven Masse im Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal für verschiedene Standardmodell- sowie supersymmetrische Prozesse am Parameterpunkt SU4 nach einer ATLAS - Simulation (aus [5]).	47
3.12	5σ - Entdeckungspotential in der $M_0 - M_{1/2}$ - Ebene für $\tan\beta = 10$ und $A_0 = 0$ für verschiedene Kanäle mit $1fb^{-1}$ integrierter Luminosität nach einer ATLAS-Simulation (aus [5]).	48

3.13	Zerfallskette eines \tilde{g} . Charakteristische Signaturen im Detektor sind harte Jets von den q sowie fehlende Transversalenergie durch das χ_1^0	48
3.14	Tree - Level SUSY-QCD Diagramme der $\tilde{g}\tilde{g}$ - Produktion	49
3.15	Tree - Level SUSY-QCD Feynman-Diagramme der $\tilde{q}\tilde{q}^*$ - Produktion	50
3.16	Tree - Level SUSY-QCD Feynman-Diagramme der $\tilde{q}\tilde{q}$ - Produktion	51
3.17	Tree - Level SUSY-QCD Feynman-Diagramme der $\tilde{g}\tilde{q}$ - Produktion	51
3.18	Verteilung der effektiven Masse im Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal, wie sie sich aus einer DELPHES-Simulation ergibt für verschiedene Werte von $\tan\beta$ und A_0 . In grau ist der Standardmodell - Untergrund eingezeichnet, in gelb das SUSY-Signal, in orange der angenommene Fehler von 30% auf das Signal.	52
3.19	Vergleich des Entdeckungspotentials bei 7 TeV Schwerpunktsenergie und 1 fb^{-1} Luminosität wie es sich in einer ATLAS-Simulation und einer DELPHES-Simulation ergibt	53
5.1	Pull-Verteilung der Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 am Best-Fit-Punkt aus Tabelle 5.1. Grenzen, die an diesem Punkt keinen χ^2 -Beitrag liefern, sind nicht eingezeichnet.	66
5.2	Zweidimensionale Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1	67
5.3	Vorhergesagtes Massenspektrum unter Berücksichtigung aller Niedrig-Energie-Messungen aus Tabelle 3.1	68
5.4	Vergleich der Ausschlüsse, wie sie das ATLAS-Experiment mit 35 pb^{-1} Luminosität Daten erhalten hat, und wie sie sich unter der Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik mit 35 pb^{-1} in dieser Arbeit ergibt	69
5.5	Bereiche der $M_0 - M_{1/2}$ - Ebene, in denen a_μ (farbig) bzw. Ω_{CDM} innerhalb ihres 2σ - Bereichs liegen, für verschiedene Werte von A_0 und $\tan\beta$. Ebenfalls eingezeichnet sind die Projektionen der Best-Fit-Punkte der Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten	71
5.6	Pull-Verteilungen der Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 sowie die Wurzel des χ^2 - Beitrags des LHC an Best-Fit-Punkten aus Tabelle 5.2. Experimentelle Grenzen, die an diesen Punkten keinen χ^2 -Beitrag liefern, sind hier nicht verzeichnet.	73
5.7	Vergleich der $M_0 - M_{1/2}$ Parameterregion, die mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 verträglich ist, mit der Parameterregion, die zusätzlich mit der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 35 pb^{-1} Luminosität verträglich ist. Durch den LHC allein wird der Bereich unterhalb der grünen Kurve mit 95% CL ausgeschlossen.	74
5.8	χ^2 -Profil (b) entlang der roten Linie im Parameterraum (a)	74

5.9	Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 35 pb^{-1}	76
5.10	Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der angenommenen Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 1 fb^{-1}	77
5.11	Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der angenommenen Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 2 fb^{-1}	78
5.12	Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der angenommenen Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 7 fb^{-1}	79
5.13	Vergleich der vorhergesagten Massen des (a) \tilde{u}_R bzw. (b) \tilde{l}_R bei Berücksichtigung aller Niedrig-Energie-Observablen aus 3.1 und unter der Annahme der Nicht-Entdeckung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten.	80
5.14	Vorhergesagte Massenverteilungen unter Berücksichtigung aller Niedrig-Energie-Observablen aus 3.1 und unter der Annahme der Nicht-Entdeckung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten	81

Tabellenverzeichnis

2.1	Das Teilchenspektrum des Standardmodells.	15
2.2	Chirale Supermultipletts im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell.	24
2.3	Vektormultipletts im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell.	24
3.1	Messwerte der Niedrig-Energie-Observablen sowie der Relikt-Dichte Dunkler Materie	34
5.1	Best-Fit-Punkt, χ^2/ndf und \mathcal{P} -Wert des Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen im Vergleich zum Ergebnis aus Referenz [6]	65
5.2	Vergleich der Best-Fit-Punkte, χ^2/ndf und P-Werte der Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus 3.1 und der Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten	69
5.3	Vergleich der Best-Fit-Punkte, χ^2/ndf und P-Werte der Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus 3.1 außer Ω_{CDM} und a_μ und der Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten	70

1 Einleitung

Methodisch ist die Physik gekennzeichnet durch den Vergleich von Experiment und Theorie. Inhaltlich ist sie es durch die Suche nach fundamentalen Prinzipien in der Natur. Dies wird besonders deutlich im Bereich der Teilchenphysik, welche die uralte Frage nach den unteilbaren Bausteinen der Welt und ihren Wechselwirkungen beantworten will.

Theoretische Physiker entwickeln neue Modelle der Welt, Phänomenologen suchen nach Messgrößen, in dieser Arbeit Observablen genannt, die zur Überprüfung dieser Modelle geeignet sind, und Experimentalphysiker führen Versuche durch, um diese Observablen zu messen.

Auf diese Weise wird versucht ein zusammenhängendes Bild von uns und unserer Umwelt zu entwerfen, welches auf allen Zeit-, Längen- und Energieskalen gültig ist.

Um immer weiter ins Universum und in dessen Vergangenheit blicken zu können, sind immer größere Teleskope errichtet worden. Um immer kleinere Strukturen bei immer höheren Energien auflösen zu können, wurden immer größere Beschleuniger gebaut.

Mit dem Standardmodell ist eine Theorie entwickelt worden, die alle bisher an solchen Beschleunigern durchgeführte Tests bestanden hat. Jedoch ist es nicht in der Lage, alle kosmologischen Beobachtungen zu erklären.

Der Anspruch der Teilchenphysik geht aber sogar über eine bloße Beschreibung der Welt hinaus. Die Theorie soll die Welt auch erklären, im folgenden Sinn: Sie soll möglichst wenige Annahmen benötigen, möglichst wenige Parameter enthalten, die passend gewählt werden müssen; sie soll möglichst einfach, einleuchtend und ästhetisch sein.

Als ästhetisch empfindet der Mensch in der Regel Symmetrien, und tatsächlich haben diese in den letzten 100 Jahren in der Teilchenphysik eine immer größere Rolle gespielt. Seit ungefähr 40 Jahren ist nun eine neue Art von Symmetrie bekannt, genannt Supersymmetrie. Sie kann so auf die Teilchenphysik angewendet werden, dass sich eine Erweiterung des Standardmodells ergibt, die sowohl in der Beschreibung, als auch in der Erklärung der Welt über dieses hinaus gehen könnte.

Bis März 2010 konnte keinerlei Evidenz für diese Symmetrie gefunden werden, insbesondere konnte keines der von ihr zusätzlich zum Standardmodell vorhergesagten Teilchen

nachgewiesen werden. Es gab aber auch keine Evidenz gegen sie: Sogar ein eingeschränktes spezifisches supersymmetrisches Modell wie mSUGRA konnte bei geeigneter Parameterwahl alle bisherigen Beobachtungen gut beschreiben.

Seit März 2010 kollidieren nun Protonen bei einer auf der Erde vorher nie erreichten Schwerpunktsenergie von 7 TeV im größten naturwissenschaftlichen Experiment der Menschheitsgeschichte: Dem Large Hadron Collider (LHC) bei Genf. Er wurde unter anderem gebaut, um nach Supersymmetrie zu suchen. Bis heute, ein Jahr später, wurden keine Hinweise auf sie gefunden. Es ist geplant, bis Ende 2012 mit dieser Energie fortzufahren, bevor eine 15-monatige Umbauphase folgen soll, um im Jahr 2014 Kollisionen bei 14 TeV durchzuführen.

In dieser Arbeit wird die Frage untersucht, was die bisherige Nichtentdeckung von neuer Physik jenseits des Standardmodells am LHC für die Fähigkeit des mSUGRA-Modells, alle Observablen zufriedenstellend beschreiben zu können, bedeutet, und welche Auswirkungen eine Nichtentdeckung bis Ende 2012 hätte.

Ihr Aufbau ist wie folgt: Im zweiten Kapitel werden das Standardmodell und seine supersymmetrische Erweiterung in Grundzügen dargestellt. Das dritte Kapitel diskutiert die Observablen, gegen die das mSUGRA - Modell getestet werden soll. Im vierten Kapitel wird die Methode beschrieben, nach der dieser Test durchgeführt wird und die am besten zu den Observablen passenden Parameterwerte bestimmt werden. Das fünfte Kapitel stellt die Ergebnisse vor.

2 Modelle

In diesem Kapitel wird zunächst beschrieben, wie die Entwicklung theoretischer Modelle von Symmetrien geleitet wird. Raum-Zeit-Symmetrien, interne Symmetrien und Supersymmetrien werden besprochen. Anschließend werden in Abschnitt 2.2 das Standardmodell (SM) und in Abschnitt 2.3 das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) in diesem Kontext eingeführt. Für mehr Details und Herleitungen aus der Gruppentheorie siehe die verwendeten Quellen [7], [8] und [9]. Die Darstellung des SM und MSSM folgt [10], [11] und [12].

2.1 Symmetrien

Die Gesetze der Natur basieren auf Symmetrien. Seit dem Beginn moderner Naturwissenschaften sind Erhaltungssätze formuliert worden, und seit fast 100 Jahren wissen wir von der engen Verbindung zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen [13]. Der Umstand, dass physikalische Systeme häufig im Lagrange-Formalismus [14] beschrieben werden, liegt darin begründet, dass er es leicht macht, mit Symmetrien umzugehen: sowohl sicherzustellen, dass sie in der Theorie enthalten sind, als auch die entsprechenden Erhaltungsgrößen abzuleiten. Auf der anderen Seite schränkt die Postulierung bestimmter Symmetrien die mögliche Form der Lagrange-Dichte stark ein. In diesem Sinne diktieren die Symmetrien die Gesetze der Physik.

Im Allgemeinen ist eine Symmetrie eine Transformation, die eine Eigenschaft eines Objekts oder Systems ungeändert lässt. Offensichtlich bildet die Menge solcher Transformationen zusammen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine mathematische Gruppe, im Falle von kontinuierlichen Transformationen sogar eine Lie-Gruppe [15]. In diesem Fall interessiert man sich insbesondere für die infinitesimalen Transformationen und ihre Erzeugenden, die Generatoren der Lie-Gruppe, welche eine Lie-Algebra bilden. Dies liegt daran, dass die Lie-Algebra als ein Vektorraum im Allgemeinen eine einfachere Struktur als die Lie-Gruppe hat, aber trotzdem Rückschlüsse auf diese ermöglicht. Zum Beispiel erhält man durch Exponenzieren der Darstellungen der Lie-Algebra eine lokale Darstellung der Lie-Gruppe [16].

Theorien der fundamentalen Teilchen und ihrer Wechselwirkungen sind nun typischer Weise relativistische Quantenfeldtheorien, in denen verlangt wird, dass die Felder in einer Darstellung bestimmter linearer Gruppen transformieren, so dass die Wirkung der Theorie

$$S = \int d^4x \mathcal{L}$$

invariant ist. Drei Arten von Symmetrien können hier unterschieden werden: Raum-Zeit-Symmetrien, interne Symmetrien und Supersymmetrien. Diese werden in den Abschnitten 2.1.1 bis 2.1.3 eingeführt.

2.1.1 Raum - Zeit - Symmetrien

Ein Wechsel des Koordinatensystems ist eine Transformation der Raum-Zeit-Koordinaten

$$\Lambda : x \rightarrow x'$$

und führt zu einer Feldtransformation

$$D(\Lambda) : \phi \rightarrow \phi',$$

wobei ϕ ein (gegebenenfalls mehrkomponentiges) Feld ist, das ein Teilchen repräsentiert.

Jedes Teilchen transformiert hier also entsprechend einer bestimmten Darstellung D der Transformation, unabhängig von den anderen Teilchen.

Laut Einsteins spezieller Relativitätstheorie [17] sind die Raum-Zeit-Transformationen, die Inertialsysteme verbinden, gegeben durch die Transformationen der eigentlichen orthochronen Untergruppe der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} . In relativistischen Quantenfeldtheorien wird daher verlangt, dass die Teilchen eine irreduzible Darstellung der Poincaré-Gruppe (auch inhomogene Lorentz-Gruppe genannt) tragen und dass die Wirkung S invariant unter Transformationen der genannten Untergruppe $\mathcal{P}_+^\uparrow < \mathcal{P}$ ist. Invarianz unter den zwei zusätzlichen unabhängigen Transformationen der Poincaré-Gruppe, Zeitumkehr T und Paritätsumkehr P , wird hingegen nicht verlangt.

Tatsächlich wurde 1956 experimentell gezeigt, dass die Schwache Wechselwirkung die Paritätserhaltung verletzt [18]. 1964 folgte der Nachweis, dass auch die kombinierte Operation CP mit der Ladungskonjugation C , die einem Teilchen sein Antiteilchen zuordnet, keine Symmetrie ist [19]. Hingegen ist es ein theoretisches Ergebnis, dass eine relativistische wechselwirkende Quantenfeldtheorie CPT -invariant sein muss [20], und bisher wurden hiervon keine experimentellen Abweichungen gefunden [1].

Die Poincaré-Gruppe ist ein semidirektes Produkt der (homogenen) Lorentzgruppe L und der Translationen \mathbb{R}^{3+1}

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^{3+1} \times L.$$

Entsprechend ist die eigentliche orthochrone Poincaré-Gruppe P_+^\uparrow ein semidirektes Produkt der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe L_+^\uparrow und der Translationen

$$\mathcal{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^{3+1} \times L_+^\uparrow.$$

Ihre Generatoren sind in der definierenden Vektordarstellung gegeben durch

$$\begin{aligned} (J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} &= i(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \\ P^\mu &= i\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\mu. \end{aligned}$$

Dabei ist P^μ der Generator der Translationen und $J^{\mu\nu}$ sind die Generatoren der eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe. Sie erfüllen die Algebra

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \\ [J^{\mu\nu}, P^\rho] &= \eta^{\mu\rho} P^\nu - \eta^{\nu\rho} P^\mu \end{aligned} \tag{2.1}$$

mit der Minkowski-Metrik η [21]. Aufgrund der Struktur als semidirektes Produkt kann jede Transformation eindeutig als Paar $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^{3+1} \times L$ geschrieben werden. Sei nun eine endlichdimensionale Darstellung $\tilde{D}(\lambda)$ der Lorentzgruppe bzw. der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe gegeben. Dann definiert

$$D(a, \lambda) : \phi \rightarrow \phi' \quad \text{mit} \quad \phi'(x) = \tilde{D}(\lambda)\phi(\lambda^{-1}(x - a)) \tag{2.2}$$

eine unendlichdimensionale Darstellung der Poincaré-Gruppe bzw. der eigentlichen orthochronen Poincare-Gruppe. Insbesondere sind die so dargestellten Translationen aufgrund des Integrals in der Wirkung stets eine Symmetrie der Theorie, wenn die Felder im Unendlichen verschwinden. Daher wird häufig explizit nur die Invarianz unter L_+^\uparrow verlangt. Aus Gleichung 2.2 lassen sich die Darstellungen der Generatoren gewinnen, indem die Änderung von ϕ unter infinitesimalen Transformationen betrachtet wird.

- Für eine infinitesimale Translation $(a, L) = (\epsilon, \text{id})$ ist

$$\delta_\epsilon \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \phi(x - \epsilon) - \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) = i\epsilon^\mu P_\mu \phi(x)$$

mit

$$P_\mu = i\partial_\mu.$$

- Analog ergibt sich für eine infinitesimale Lorentztransformation der Form

$$(a, L) = (0, \text{id} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu})$$

eine Variation von

$$\delta_\omega(x) = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})$$

mit

$$L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu).$$

Dabei sind $S^{\mu\nu}$ die Generatoren der endlich dimensionalen Darstellung \tilde{D} .

Nur die Generatoren $S^{\mu\nu}$ sind also noch zu spezifizieren. Dies geschieht im Folgenden je nach dem Spin des Teilchens. Die entsprechende lorentzinvariante freie Lagrangedichte sowie die daraus mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung abgeleitete freie Bewegungsgleichung werden jeweils angegeben.

Spin 0

Ein Teilchen mit Spin 0 wird durch ein skalares Feld ϕ beschrieben, für das

$$S^{\mu\nu} = 0$$

gilt. Die lorentzinvariante Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

Die Bewegungsgleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi = 0.$$

Spin 1/2

Teilchen mit Spin 1/2 werden durch vierkomponentige Dirac-Spinoren ψ_i [22] beschrieben, für die

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

gilt. Dabei sind die γ_μ 4×4 -Matrizen, welche die Dirac-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4}$$

erfüllen. Eine mögliche Darstellung ist die Weyl- oder chirale Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Die lorentzinvariante freie Lagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

die zugehörige Dirac-Gleichung [22] durch

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

gegeben.

Wie aus der chiralen Darstellung der Diracmatrizen ersichtlich, ist die Dirac-Darstellung als Darstellung der Lorentzgruppe reduzibel. Die irreduziblen Objekte sind die zweikomponentigen Weylspinoren in der Zerlegung

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}.$$

Die Transformation von ψ_L nennt man die Transformation eines linkshändigen Weyl-Spinors, die von ψ_R die eines rechshändigen Weyl-Spinors. Die Darstellungen sind durch komplexe Konjugation miteinander verknüpft. Insbesondere lässt sich daher ein Dirac-Spinor nur durch zwei linkshändige Weyl-Spinoren darstellen gemäß

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}.$$

In dieser Schreibweise ist

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + i\bar{\phi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi - m(\chi\phi + \bar{\phi}\bar{\chi}).$$

Der links- und der rechthändige Teil werden vom Massenterm gemischt. Das wird dazu führen, dass in chiralen Eichtheorien, in denen beide Teile in einer unterschiedlichen Darstellung einer internen Eichgruppe transformieren, Massenterme im Allgemeinen nicht eichinvariant sind. Ist hingegen $m = 0$ so entkoppeln die Teile und man erhält zwei voneinander unabhängige Dirac-Gleichungen, genannt Weyl-Gleichungen. Ein masseloses Fermion lässt sich also durch einen Weyl-Spinor beschreiben. Gilt $\phi \equiv \chi$ so hat der Spinor zwei Freiheitsgrade weniger und heißt Majorana-Spinor [23].

Spin 1

Spin 1 Teilchen werden durch vierkomponentige Vektorfelder beschrieben, die in der definierenden Darstellung transformieren, d.h. für sie gilt

$$S^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}.$$

Die Proca-Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$$

mit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu A^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

sind für $m = 0$ gerade die Maxwellgleichungen im Vakuum [24].

2.1.2 Interne Symmetrien

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt werden nun Transformationen betrachtet, die nicht durch Koordinatentransformationen induziert sind. Das einfachste Beispiel sind die Transformationen der abelschen Gruppe

$$U(1) = \{z \in \mathbf{C} : z\bar{z} = 1\} = \{e^{i\alpha}, \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Transformiert ein Dirac-Spinor unter einem Element dieser Gruppe gemäß

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iy\alpha}\psi(x)$$

mit der Ladung $y \in \mathbb{R}$, so ist L_{Dirac} invariant unter der Wirkung dieser Gruppe. Dies gilt nicht mehr, wenn $\alpha = \alpha(x)$ ortsabhängig ist, d.h. wenn an jedem Raum-Zeit-Punkt eine unabhängige Gruppe $U(1)$ wirkt. Die Ursache liegt im geänderten Transformationsverhalten der Ableitung

$$\partial_\mu \psi' = e^{iy\alpha} \partial_\mu \psi + i \partial_\mu \alpha e^{iy\alpha} \psi.$$

Die Invarianz kann erhalten bleiben, wenn die Ableitung durch eine sogenannte kovariante Ableitung ersetzt wird, die wie das Feld selbst transformiert:

$$(D_\mu \psi)' = e^{iy\alpha} D_\mu \psi.$$

Dies kann erreicht werden, indem ein Vektorfeld A_μ mit einer Kopplungskonstanten g eingeführt wird und der Ansatz

$$D_\mu = \partial_\mu - igyA_\mu$$

gemacht wird. Transformiert das sogenannte Eichboson A_μ gemäß

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha,$$

so definiert der Ansatz eine kovariante Ableitung. Ein eich- und lorentzinvarianter kinetischer Term für das Eichboson lässt sich unter Verwendung des Feldstärketensors

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

mit

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

finden.

Die so resultierende Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

ist gerade die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik (QED, [25]).

Dieses Prinzip – das Einführen von Wechselwirkungen durch das Einführen kovarianter Ableitungen, die eine globale Symmetrie lokal machen – wurde von Yang und Mills auf nichtabelsche Gruppen angewendet [26].

Seien dazu nun mehrere Felder ϕ_i , die jeweils ein Teilchen repräsentieren, zu einem Vektor $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$ zusammengefasst. Betrachtet werden infinitesimale Transformationen

$$\phi \rightarrow (1 + i\alpha^a T^a)\phi,$$

wobei die T_a Generatoren einer Lie-Gruppe in einer gewissen Darstellung dieser Gruppe sind. Für jeden dieser Generatoren wird nun ein Eichboson A_μ^a eingeführt und der Ansatz $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a$ gemacht. Nach der Definition einer kovarianten Ableitung ist die Transformation der Eichbosonen so zu wählen, dass

$$(D_\mu\phi)' = (1 + \alpha^a T^a)D_\mu\phi$$

gilt. Dies wird mit dem Ansatz erreicht, wenn die Eichbosonen in der adjungierten Dar-

stellung transformieren, d.h. gemäß

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c.$$

Dabei sind die Strukturkonstanten f^{abc} durch die Gleichungen

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

definiert. Im Fall einer abelschen Gruppe sind sie gleich Null. Ein kinetischer Term ergibt sich für die Eichbosonen mit der Feldstärke

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

zu $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$. Im Falle nichtverschwindender Strukturkonstanten enthält dieser Term auch Selbstwechselwirkungen der Eichbosonen. Der Nachweis, dass diese Selbstwechselwirkungen zur „asymptotischen Freiheit“, d.h. zum Sinken der effektiven Kopplung bei hohen Energieskalen, führen können, war ein wichtiger Schritt in der Entwicklung der Quantenchromodynamik [27].

2.1.3 Supersymmetrie

Die Frage liegt nahe, ob sich Raum-Zeit-Symmetrien und interne Symmetrien in nicht trivialer Weise verbinden lassen. Nicht trivial bedeutet, dass die entsprechenden Symmetriegruppen kein direktes Produkt bilden. Mit anderen Worten werden Generator(en) und Vertauschungsrelationen gesucht, die in konsistenter Weise zu Gleichung (2.1) hinzugefügt werden können, ohne dass diese Generatoren mit allen bereits vorhandenen Generatoren kommutieren. Die Suche nach der Antwort auf diese Frage führte zu einer Reihe von „No-go-Theoremen“. Coleman und Mandula zeigten schliesslich 1967 unter sehr allgemeinen Annahmen „the impossibility of combining space-time and internal symmetries in any but a trivial way“ [28]. 1971 konnten Golfand und Likhtman aber zeigen, dass es möglich ist Gleichung (2.1) in nicht trivialer Weise zu erweitern, sofern Antivertauschungsrelationen zugelassen werden [29]. Dies führt zu einer Verallgemeinerung des Konzepts der Lie-Algebra zur Lie-Super- oder graduierten Lie-Algebra und der Lie-Gruppe zur Super-

Gruppe. Die Relationen für den neuen Generator Q , der einen Weyl-Index trägt, lauten:

$$\begin{aligned}
 \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m \\
 \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \\
 [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_m] &= [Q_\alpha, P_m] = 0 \\
 [Q_\alpha, M^{mn}] &= \frac{1}{2}\sigma_\alpha^{mn\beta} Q_\beta \\
 [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M^{mn}] &= \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}}^{mn\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Es ist möglich, in sogenannten erweiterten Supersymmetrien mehrere solcher Generatoren einzuführen. Davon abgesehen ist (2.3) die eindeutige Erweiterung der Poincaré-Algebra, wie Haag, Lopuszanski und Sohnius zeigten [30].

Die Darstellungen dieser Super-Poincaré-Algebra werden Supermultipletts genannt. Das chirale Multiplett besteht aus einem komplexen Skalarfeld ϕ_i , einem Weyl-Fermion ψ_i und einem komplexen Skalarfeld F_i . Ihre Variation unter einer infinitesimalen SUSY-Transformation um den Parameter ϵ , erzeugt durch Wirkung des Operators $\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}$, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \delta\phi_i &= \epsilon\psi_i, \\
 \delta(\psi_i)_\alpha &= -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi_i + \epsilon_\alpha F_i, \\
 \delta F_i &= -i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Im Gegensatz zu den internen Symmetrien aus dem vorherigen Abschnitt, die mit den Poincaré-Transformationen vertauschen, transformieren hier also Teilchen verschiedenen Spins ineinander.

Eine supersymmetrische Lagrangedichte für N solcher chiralen Multipletts ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + i\psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i + \left(-\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i + c.c.\right).$$

Dabei ergeben sich W^i und W^{ij} als formale Ableitungen

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta \phi_i}, \quad W^{ij} = \frac{\delta^2}{\delta \phi_i \delta \phi_j} W$$

des Superpotentials

$$W = \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k.$$

Es zeigt sich, dass F_i ein Hilfsfeld ohne kinetischen Term ist. Seine Euler-Lagrange-Gleichungen

$$F_i = -W_i^*$$

sind daher rein algebraisch und können benutzt werden, um F_i aus der Lagrangefunktion zu eliminieren.

Je nach der Wahl von W wird \mathcal{L} gewisse globale Symmetrien haben. Möchte man, Abschnitt 2.1.2 folgend, diese Symmetrien lokal machen und die N chiralen Multipletts durch die Einführung kovarianter Ableitungen an n Vektorbosonen koppeln, so ist zunächst eine Darstellung der Superalgebra notwendig, die ein Vektorboson enthält. Dies ist das sogenannte Vektormultiplett, bestehend aus einem Vektorboson A^a , einem Weyl-Fermion λ^a , genannt Gaugino, und einem reellen Skalarfeld D^a . Ihre Variation unter obiger SUSY-Transformation ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^\dagger \bar{\sigma}_\mu \lambda^a + \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}_\mu \epsilon), \\ \delta \lambda_\alpha^a &= \frac{i}{2\sqrt{2}}(\sigma^\mu \sigma^\nu \epsilon)_\alpha F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_\alpha D^a, \\ \delta D^a &= \frac{i}{\sqrt{2}}(-\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + D_\mu \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}^\mu \epsilon).\end{aligned}$$

Eine supersymmetrische und eichinvariante Lagrangedichte für n solcher Vektormultipletts in der adjungierten Darstellung einer Symmetriegruppe mit Strukturkonstanten f^{abc} ist

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i\lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + \frac{1}{2}D^a D^a,$$

wobei wie oben

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c,$$

und die Gauginos ebenfalls in der adjungierten Darstellung transformieren, d.h. ihre kovariante Ableitung ist gegeben durch

$$D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + gf^{abc}A_\mu^b \lambda^c.$$

Auch D^a ist ein Hilfsfeld ohne kinetischen Term mit Bewegungsgleichung

$$D^a = -g(\phi^* T^a \phi).$$

Aus den chiralen und Vektormultipletts lässt sich nun wie folgt eine supersymmetrische Eichtheorie konstruieren:

- Die Ableitungen in $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ werden durch die entsprechenden kovarianten Ableitungen ersetzt, was zu einer Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{\text{chiral}'}$ führt
- Zu der gemeinsamen Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{chiral}'}$ wird ein weiterer Term addiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{chiral}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} \\ & - \sqrt{2}g(\phi^* T^a \psi)\lambda^a - \sqrt{2}g\lambda^{\dagger a}(\psi^\dagger T^a \phi) + g(\phi^* T^a \phi)D^a \end{aligned}$$

- In den Transformationen werden die Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzt.
- Zur Transformation (2.4) wird ein weiterer Term addiert: $\delta F_i = -i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i + \sqrt{2}g(T^a \phi)_i \epsilon^\dagger \lambda^{\dagger a}$

Mit diesen Änderungen ist nun eine supersymmetrische Eichtheorie gegeben. Es sei dabei explizit darauf hingewiesen, dass die N chiralen Multipletts jeweils *eine* Darstellung der Eichgruppe bilden oder, in anderen Worten, ϕ , ψ und F transformieren jeweils identisch unter der Eichgruppe. Ebenso transformieren neben den A_μ^a auch die λ^a und D^a in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe. Darüberhinaus haben alle Felder eines Multipletts notwendigerweise die gleiche Masse.

2.2 Das Standardmodell

2.2.1 Definition des Standardmodells

Um eine relativistische (lokale) Eichtheorie zu konstruieren, sind nach dem vorherigen Kapitel die folgenden Schritte notwendig:

1. Es ist eine Eichgruppe zu wählen. Im Falle des Standardmodells ist dies die Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Dabei beschreibt die $SU(3)$ die starke Kraft und $SU(2) \times U(1)$ die elektro-schwache Kraft.

2. Für jeden Generator der Eichgruppe ist ein vektorielles Eichboson in der adjungierten Darstellung einzuführen. Im Falle des Standardmodells sind dies die acht Gluonen für die $SU(3)$, drei W-Bosonen für die $SU(2)$ und ein B-Boson für die $U(1)$ (siehe Tabelle 2.1).
3. Es sind die Felder der Theorie, die nicht als Eichboson dienen, zu benennen. Dabei muss ihre Darstellung bezüglich der Lorentzgruppe (ihr Spin) sowie ihre Darstellung bezüglich der Eichgruppe festgelegt werden (siehe Tabelle 2.1). Im Falle des Standardmodells sind dieses die sogenannten Materiefelder, gebildet durch Leptonen und Quarks, sowie das Higgsboson.
4. Es ist mittels der den Darstellungen entsprechenden kovarianten Ableitungen eine eich- und lorentzinvariante Lagrangedichte für die eingeführten Felder zu konstruieren. Im Falle des Standardmodells lautet diese

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SM}} = & -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 \left((F_{mn}^a F^{mn a}) \right) - D_m h D^m \bar{h} \\
& + \sum_{I=1}^3 \left(-i \bar{q}_L^I \not{D} q_L^I - i \bar{u}_R^I \not{D} u_R^I - i \bar{d}_R^I \not{D} d_R^I - i \bar{l}_L^I \not{D} l_L^I - i \bar{e}_R^I \not{D} e_R^I \right) \\
& - \sum_{I,J=1}^3 \left((Y_u)_{IJ} \bar{h} q_L^I u_R^J + (Y_d)_{IJ} h q_L^I d_R^J + (Y_l)_{IJ} h l_L^I e_R^J + h.c. \right) - V(h, \bar{h}).
\end{aligned}$$

Die erste Zeile von \mathcal{L}_{SM} enthält die kinetischen Terme der Bosonen, die zweite die der Fermionen. Die dritte Zeile enthält das Higgspotential

$$V(h, \bar{h}) = \mu^2 h \bar{h} + \lambda (h \bar{h})^2$$

und Yukawa-Kopplungen.

Das Higgs-Boson ist das einzige bisher noch nicht beobachtete Teilchen des Standardmodells. Es ist eines der Ziele des LHC, dieses zu entdecken. Seine Einführung ist dadurch motiviert, dass es anderen Teilchen Masse gibt. Da das Standardmodell eine chirale Theorie ist, sind explizite Massenterme der Fermionen nicht eichinvariant. Tatsächlich ist der einzige Term in \mathcal{L} , der die Form eines Massenterms hat, der Term $\mu^2 h \bar{h}$ im Higgspotential. Im Standardmodell wird aber $\mu^2 < 0$ gewählt, so dass auch dieses kein expliziter Massenterm ist. Wie trotzdem gerade diese Wahl Massen in die Theorie bringt, wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

		Spin	SU(3)	SU(2)	U(1) _Y	U(1) _{em}
Quarks	$q_L^I = \begin{pmatrix} u_L^I \\ d_L^I \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	3	2	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
	u_R^I	$\frac{1}{2}$	$\bar{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	d_R^I	$\frac{1}{2}$	$\bar{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Leptonen	$l_L^I = \begin{pmatrix} \nu_L^I \\ e_L^I \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	e_R^I	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
Higgs	$h = \begin{pmatrix} h^0 \\ h^- \end{pmatrix}$	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
Eichbosonen	G	1	8	1	0	0
	W	1	1	3	0	$(0, \pm 1)$
	B	1	1	1	0	0

Tabelle 2.1: Das Teilchenspektrum des Standardmodells.

2.2.2 Physikalische Zustände des SM

Die Wahl $\mu^2 < 0$ im Higgspotential führt dazu, dass das Minimum des Potentials nicht verschwindet und nicht eichinvariant ist. Genauer ist die Theorie im Grundzustand nur invariant unter einer Untergruppe $U(1)_{\text{em}}$ der Gruppe $SU(2) \times U(1)$. Diese entspricht gerade der $U(1)$ der QED mit einer Kopplungskonstanten

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

und elektrischen Ladungen

$$Q = T^3 + Y.$$

Dabei bezeichnen g und g' die Kopplungskonstanten der $SU(2)$ und $U(1)$, T^3 die dritte Komponente des Isospins bezüglich $SU(2)$ und Y die (Hyper-)Ladung bezüglich $U(1)$. Man spricht von einer spontanen Symmetriebrechung der Form

$$SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)_{\text{em}}.$$

Nach dem Goldstone-Theorem existiert zu jedem gebrochenen Symmetrie-Generator einer globalen kontinuierlichen Symmetrie ein masseloses Skalarfeld, genannt Goldstone-Boson [31]. Die Gruppen $U(N)$ besitzen N^2 unabhängige Generatoren, die Gruppen $SU(N)$ besitzen $N^2 - 1$ unabhängige Generatoren. Daher müsste es im Standardmodell drei Goldstone-Bosonen geben, entsprechend drei der vier Freiheitsgraden des Higgsdubletts, wenn die Symmetrie nicht durch Einführung kovarianter Ableitungen lokal gemacht worden wäre. Gehören die Generatoren zu lokalen Symmetrien, so werden hingegen die entsprechenden Eichbosonen massiv und bekommen so einen zusätzlichen Freiheitsgrad der Polarisation. Man spricht davon, dass die Goldstone-Bosonen von den Eichbosonen „gegessen“ werden.

Im Standardmodell werden also drei der vier Eichbosonen der $SU(2) \times U(1)$ massiv. Explizit ist das durch Entwicklung der Higgfelder ums Minimum in den kovarianten Ableitungen derselben zu sehen. Dabei sind die Masseneigenzustände gegeben durch

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2),$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix},$$

mit dem Weinberg-Winkel θ_W . Masselos bleibt gerade das Photon A_μ der QED. Das phy-

sikalische Higgs-Boson erhält durch die Terme im Potential V eine Masse. Die up-artigen Quarks erhalten eine Masse durch den Yukawa-Term mit Y_u , die down-artigen durch den Term mit Y_d , die geladenen Leptonen durch den Term mit Y_l . Die Neutrinos ν bleiben masselos. Wie heute durch die Beobachtung der Neutrino-Oszillationen bekannt ist, kann das nur näherungsweise richtig sein. Das Standardmodell kann erweitert werden, um dies zu berücksichtigen, zum Beispiel durch Einführung eines rechtshändigen Neutrinos, das ein Singlett unter allen Eichgruppen ist, und eine entsprechende Yukawa-Kopplung hat.

Die Yukawakopplungen sind im Allgemeinen 3×3 -Matrizen im Familienraum. Sie können jeweils mittels biunitärer Transformationen geschrieben werden als

$$Y_{IJ} = U_1^{IK} \tilde{Y}_{KL} U_2^{LJ},$$

mit einer diagonalen Matrix \tilde{Y} sowie unitären Matrizen U_1 und U_2 . Absorption der unitären Matrizen in eine Umdefinierung der Felder führt dann auf die Masseneigenzustände.

Diese Diagonalisierung der Massenterme führt gerade dazu, dass Wechselwirkungsterme ihre Diagonalität verlieren.

So hat der geladene Quark-Strom, an den die W-Bosonen koppeln, die Gestalt

$$j_{CC}^\mu = \frac{g}{\sqrt{(2)}} \bar{U}^I \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} V^{IJ} D^J,$$

wobei U und D die up- und down-artigen Dirac-Spinoren der Quarks bezeichnen und V eine unitäre Matrix, genannt CKM-Matrix (nach Cabibbo, Kobayashi, Maskawa, [32], [33]) ist.

Da im Standardmodell das rechtshändige Neutrino fehlt, kommt der geladene Lepton-Strom ohne diese Mischung aus.

Der neutrale Strom, an den das Z koppelt, bleibt hingegen auch für die Quarks in der neuen Basis Familien-diagonal:

$$j_{NC}^\mu = \frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f,$$

für ein Dirac-Fermion f mit Vektorkopplung

$$g_V^f = T_3^f - 2 \sin^2 \theta_W Q_f$$

und Axialvektorkopplung

$$g_A^f = T_3^f.$$

Dies impliziert die Abwesenheit sogenannter Flavor-Changing-Neutral-Current-Reaktionen (FCNC) am Tree-Level. Diese sind auch am Loop-Level durch den GIM-Mechanismus (nach Glashow, Iliopoulos, Maiani, [34]) unterdrückt. Die Tatsache, dass dies mit den Beobachtungen gut verträglich ist, stellt starke Beschränkungen an Theorien neuer Physik.

Insgesamt gibt es im Standardmodell also die folgenden physikalischen Zustände:

- sechs Quarks u, d, c, s, b, t (Dirac-Fermionen)
- drei geladene Leptonen e, μ, τ (Dirac-Fermionen)
- drei Neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ (Weyl-Fermionen)
- ein Higgs-Boson h (reelles Skalarfeld)
- ein W-Boson W^\pm (komplexes Vektorfeld)
- ein Photon γ (reelles Vektorfeld)
- acht Gluonen G (reelle Vektorfelder)

2.3 Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

In diesem Abschnitt wird eine supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells, das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM), eingeführt. In Abschnitt 2.3.1 wird dieser Schritt zunächst motiviert. Analog zum vorherigen Abschnitt wird in Abschnitt 2.3.2 das MSSM und insbesondere das mSUGRA-Modell definiert, bevor in Abschnitt 2.3.3 die physikalischen Zustände beschrieben werden.

2.3.1 Motivation

Argumente für oder gegen ein bestimmtes Modell lassen sich grob in zwei Klassen aufteilen:

- Argumente, welche die Beschreibung der Welt betreffen, genannt experimentelle Argumente
- Argumente, welche die Erklärung der Welt betreffen, genannt theoretische Argumente



Abbildung 2.1: Schleifendiagramme, die zur Higgsmasse beitragen

Die Theorie soll zunächst die Welt richtig beschreiben, dies wird in Experimenten überprüft. Steht eine Theorie im Widerspruch zu einem Experiment, so ist sie offenbar als fundamentale Theorie nicht wahr. Während das Standardmodell alle Beobachtungen an Beschleunigern bisher richtig beschreibt, ist es im Gegensatz zur Supersymmetrie nicht in der Lage, die kosmologisch beobachtete Dunkle Materie zu beschreiben. Dies wird in Kapitel 3 besprochen.

Ein offensichtliches experimentelles Problem, das sowohl das Standardmodell als auch das MSSM haben, ist, dass beide nicht die experimentell beobachtete Gravitationskraft enthalten. Es wird angenommen, dass die Gravitationskraft von einem Teilchen mit Spin 2 vermittelt werden könnte, aber es ist bisher keine renormierbare Quantenfeldtheorie eines Spin-2-Teilchens bekannt. Es ist also möglich, dass zur Beschreibung der Gravitation ein über die Quantenfeldtheorie hinausgehendes Konzept entwickelt werden muss. Ein Kandidat für eine renormierbare Quantentheorie der Gravitation ist die Stringtheorie, und nach derzeitigem Stand müsste diese supersymmetrisch sein (Superstrings). Die supersymmetrische Quantenfeldtheorie, die in dieser Arbeit behandelt wird, wäre dann denkbar als eine effektive Niedrig-Energie-Theorie einer supersymmetrischen Stringtheorie.

Theoretische Argumente sind von einer anderen Qualität. Hier geht es um Aspekte innerhalb der Theorie, die als unbefriedigend empfunden werden, ohne dass sie die Theorie ausschließen würden. Es werden im Folgenden einige genannt.

Das ästhetische Argument

Wenn die beobachtete Poincaré-Invarianz Teil genau einer nicht trivialen größeren Symmetrie ist - warum sollte in der Natur gerade nur genau dieser 'unvollständige' Teil realisiert sein?

Das Hierarchie-Problem

Feynman-Diagramme wie das in Abbildung 2.1a mit einem Fermion in der Schleife sind quadratisch divergent und führen zu Quantenkorrekturen des Higgsmassenquadrats, proportional zum Quadrat der Cut-Off-Skala. Ist das Standardmodell die gültige Theorie bis zur Planck-Skala von ungefähr 10^{19} GeV, so sind diese Korrekturen viele Größenordnungen größer als der durch indirekte Messungen erwartete Wert von rund 100^2 GeV². Durch ein entsprechendes Justieren (fine-tunen) der sogenannten nackten Higgsmasse (der Masse ohne Quantenkorrekturen) ist es möglich, dafür zu sorgen, dass sich insgesamt dieser niedrige Wert der Higgsmasse ergibt. Wieder gäbe es aber keine Erklärung dafür. Die gegenseitige Aufhebung riesiger voneinander unabhängiger Beiträge zur Higgsmasse wäre reiner Zufall. Dies ist in supersymmetrischen Theorien anders. Supersymmetrie verlangt, dass es zu jedem Fermion-Diagramm wie in Abb. 2.1a ein skalares Diagramm des Superpartners wie in Abbildung 2.1b gibt, welches die quadratische Divergenz gerade aufhebt. Hier ist die Aufhebung also kein Zufall, sondern durch eine Symmetrie erklärt.

Das GUT-Argument

Neben der in dieser Arbeit besprochenen Erweiterung des Standardmodells durch Vergrößerung der Raum-Zeit-Symmetrien werden auch sogenannte Grosse Vereinheitlichte Feldtheorien (GUTS) diskutiert, welche die interne Symmetriegruppe vergrößern, indem die Symmetriegruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ des Standardmodells durch eine einfache Gruppe ersetzt wird. Die Folge einer einfachen Symmetriegruppe wäre die Existenz nur einer fundamentalen Kopplungskonstanten und somit eine Vereinigung aller Kräfte. Umgekehrt setzt die Existenz einer solchen Symmetrie voraus, dass die beobachteten skalenabhängigen Kopplungen sich tatsächlich an einer Skala vereinigen. Wie Abbildung 2.2 zeigt, ist das im Standardmodell nicht der Fall, im supersymmetrischen Standardmodell hingegen schon.

2.3.2 Definition des MSSM

In diesem Abschnitt soll das Standardmodell minimal erweitert werden, so dass es supersymmetrisch wird. Nach Abschnitt 2.1 sind hierfür die folgenden Schritte nötig:

1. Aus den Standardmodell-Feldern müssen unter Einführung möglichst wenig neuer Felder Supermultipletts gebildet werden. Da alle Felder eines Supermultipletts in der gleichen Darstellung der Eichgruppe transformieren müssen, und im Standardmodell Bosonen und Fermionen in verschiedenen Darstellungen transformieren, muss das Teilchenspektrum hierfür verdoppelt werden. Dies geschieht in den Tabellen 2.2

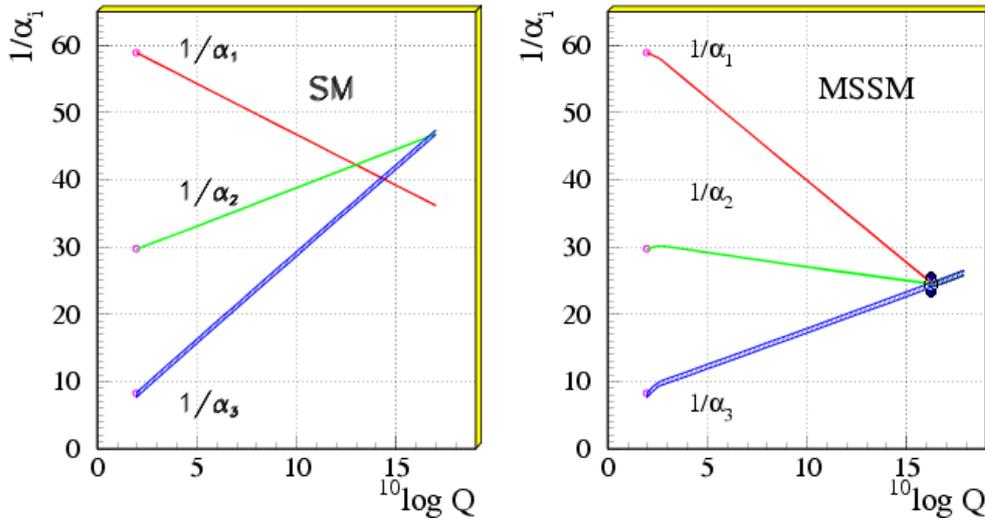


Abbildung 2.2: Abhängigkeit der effektiven Kopplungen von der Energieskala im Standardmodell sowie im MSSM (aus [1])

sowie 2.3, wobei die neu eingeführten Superpartner durch eine Tilde gekennzeichnet sind. Die Quarks und Leptonen bilden mit den Squarks und Sleptonen chirale Multipletts. Ebenso bildet das Higgsdublett ein Supermultiplett mit den Higgsinos. Um supersymmetrische Yukawa-Kopplungen sowohl mit den up-Quarks als auch mit den down-Quarks bilden zu können, ist dabei allerdings die Einführung eines zweiten Higgsdubletts mit entgegengesetztem Vorzeichen der Hyperladung erforderlich. Die Eichbosonen schließlich bilden Vektormultipletts mit den Gauginos.

2. Als nächstes ist das Superpotential zu spezifizieren. Um die Yukawa-Kopplungen sowie das Higgspotential des Standardmodells zu rekonstruieren, ist eine naheliegende Wahl:

$$W = \sum_{IJ} \left((Y_u)_{IJ} h_u \tilde{q}_L^I \tilde{u}_R^J + (Y_d)_{IJ} h_d \tilde{q}_L^I \tilde{d}_R^J + (Y_l)_{IJ} h_d \tilde{l}_L^I \tilde{l}_R^J \right) + \mu h_u h_d.$$

Dieses ist nicht das allgemeinste durch Eichinvarianz erlaubte Superpotential. Zum Beispiel sind Terme möglich, welche die Baryon- und Leptonzahlerhaltung verletzen. Insbesondere wird dann im Allgemeinen der Protonzerfall erlaubt. Solche Terme können durch die Einführung einer diskreten Symmetrie, der sogenannten R-Parität, verboten werden, wenn alle Standardmodellteilchen unter dieser Symmetrie eine Quantenzahl von +1 und alle Superpartner eine Quantenzahl von -1 zugewiesen bekommen. Die Einführung dieser Symmetrie hat zwei weitere unmittelbare Konsequenzen:

- Supersymmetrische Teilchen können nur paarweise erzeugt werden.

- Das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) ist stabil.

Insbesondere letzteres wird als sehr attraktiv angesehen, stellt das LSP so doch einen Kandidaten für Dunkle Materie (siehe Kapitel 3) dar.

Die bis hier definierte Erweiterung des Standardmodells ist zwar supersymmetrisch, allerdings ist bereits aus Abschnitt 2.1.3 bekannt, dass in supersymmetrischen Theorien die Teilchen eines Supermultipletts die gleiche Masse haben. Dies ist im Widerspruch zur Beobachtung, denn dann hätten die leichten Superpartner bereits beobachtet werden müssen. Es ist daher notwendig, Supersymmetrie zu brechen. Die naheliegende Überlegung, Supersymmetrie mittels der bisher eingeführten Felder spontan zu brechen, führt allerdings ebenfalls zu phänomenologischen Problemen wie einer Summenregel für die Massen

$$2 \sum_{\text{Fermionen } f} m_f = \sum_{\text{Bosonen } b} m_b.$$

Dies führt zu der Überlegung, einen „Hidden Sector“ einzuführen, in dem Supersymmetrie spontan gebrochen wird, und der durch eine schwache Wechselwirkung mit dem sichtbaren Sektor die Symmetriebrechung vermittelt. Verschiedene Mechanismen sind hierfür vorgeschlagen worden, darunter Gravitations-vermittelte Symmetriebrechung, Eich-vermittelte Symmetriebrechung (GMSB) und Anomalie-vermittelte Symmetriebrechung (AMSB). Die Unkenntnis über den richtigen Vorgang der Symmetriebrechung kann dadurch parametrisiert werden, dass eine effektive Lagrange-Dichte mit explizit Supersymmetrie brechenden Termen benutzt wird. Dabei sollten die explizit SUSY brechenden Terme allerdings keine quadratischen Divergenzen einführen, um die supersymmetrische Lösung des Hierarchie-Problems nicht wieder zu zerstören. Man spricht davon, dass nur „weiche Brechung“ erlaubt wird. Die erlaubten Terme sind im Falle des MSSM gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & - \left((a_\mu)_{IJ} h_u \tilde{q}_L^I \tilde{u}_R^J + (a_d)_{IJ} h_d \tilde{q}_L^I \tilde{d}_R^J + (a_e)_{IJ} h_d \tilde{l}_L^I \tilde{e}_R^J + b h_u h_d + h.c. \right) \\ & - \sum_{\text{alle Skalare}} m_{ij}^2 A^i \bar{A}^j - \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^3 \tilde{m}_a (\lambda\lambda)_a + c.c. \right). \end{aligned}$$

Eine sorgfältige Analyse, welche der so eingeführten Parameter physikalisch sind, führt dazu, dass die so gebrochene Supersymmetrie 105 neue Parameter einführt.

Die starke Unterdrückung von FCNR-Reaktionen und die schwache CP-Verletzung, die in guter Übereinstimmung mit dem Standardmodell in Experimenten gefunden werden, schränken diese Parameter jedoch sehr ein. Eine einfache Möglichkeit dieses zu berücksichtigen, ist die Annahme von „flavor-blinden“ skalaren Massen m_{ij}^2 , diagonal im Familienraum, sowie von trilinearen Kopplungen proportional zu den Yukawa-Kopplungen.

Letzteres stellt sicher, dass nur die Squarks und die Sleptonen der dritten Familie große trilineare Kopplungen haben.

Im einfachsten Fall nimmt man nun an, dass an der GUT-Skala alle diese drei Proportionalitätskonstanten gleich sind, setzt dort jeweils alle skalaren Massen sowie alle Gauginomassen gleich und nimmt eine spezielle Form von b an:

$$\begin{aligned} M_0^2 \delta_{ij} &\equiv m_{ij}^2 \\ M_{1/2} &\equiv \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2 = \tilde{m}_3 \\ (a_\mu)_{IJ} &= A_0(Y_u)_{IJ} \\ (a_d)_{IJ} &= A_0(Y_u)_{IJ} \\ (a_l)_{IJ} &= A_0(Y_l)_{IJ} \\ b &= b_0 M_0 \mu. \end{aligned}$$

Somit verbleiben nur fünf reelle Parameter: M_0 , $M_{1/2}$, A_0 , b_0 und μ . Die Forderung, dass elektroschwache Symmetriebrechung auftritt, führt jedoch im Allgemeinen zu den Bedingungen

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \sin 2\beta (m_u^2 + m_d^2 + 2|\mu|^2) \\ M_z^2 &= -2|\mu|^2 + \frac{2}{1 - \tan^2 \beta} (m_u^2 \tan^2 \beta - m_d^2). \end{aligned}$$

Dabei ist $\tan \beta$ definiert als das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte von h_u^0 und h_d^0 . Diese Bedingungen erlauben es, b und μ durch $\tan \beta$ und $\text{sgn } \mu$ zu ersetzen. In obigem Modell verbleiben damit die Parameter M_0 , $M_{1/2}$, A_0 und $\text{sgn } \mu$. Dieses Modell ist als cMSSM oder mSUGRA bekannt und ist dasjenige, was in dieser Arbeit untersucht wird.

2.3.3 Physikalische Zustände des MSSM

Im Folgenden wird beschrieben, welche Masseneigenzustände im MSSM zusätzlich zu denen des Standardmodells auftreten.

Erweiterter Higgs-Sektor

Von den acht reellen Freiheitsgraden im Higgs-Sektor gehen im Fall von spontaner Symmetriebrechung wieder drei in die Freiheitsgrade der longitudinalen Polarisation von Z - und W -Bosonen. Somit verbleiben fünf Freiheitsgrade. Zwei bilden ein komplexes, geladenes Skalarfeld H^\pm . Zwei weitere bilden jeweils ein neutrales, reelles Skalarfeld, wovon das leichtere h , das schwerere H genannt wird. Schließlich gibt es noch ein neutrales, reelles

	Spin1/2	Spin1	SU(3)	SU(2)	U(1) _Y	U(1) _{em}
Quarks	q_L^I	\tilde{q}_L^I	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
	u_R^I	\tilde{u}_R^I	$\bar{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	d_R^I	\tilde{d}_R^I	$\bar{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Leptonen	l_L^I	\tilde{l}_R^I	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	e_R^I	\tilde{e}_R^I	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	1	1
Higgs	$\begin{pmatrix} \tilde{h}^0 \\ \tilde{h}^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{h}_d^0 \\ \tilde{h}_d^- \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \tilde{h}^+ \\ \tilde{h}^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{h}_u^+ \\ \tilde{h}_u^0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tabelle 2.2: Chirale Supermultipletts im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell.

	Spin1/2	Spin1	SU(3)	SU(2)	U(1) _Y	U(1) _{em}
Eichbosonen	G	$\mathbf{1}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
	W	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{0}$	$(0, \pm 1)$
	B	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

Tabelle 2.3: Vektormultipletts im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell.

Skalarfeld, das unter Paritätstransformationen das Vorzeichen wechselt, ein sogenannter Pseudoskalar A^0 .

Charginos und Neutralinos

Die geladenen Winos \tilde{W}^1 und \tilde{W}^2 sowie die geladenen Higgsinos \tilde{h}_u^+ und \tilde{h}_d^- bilden die beiden Charginos χ_1^\pm und χ_2^\pm . Dabei handelt es sich um Dirac-Fermionen, aufsteigend sortiert nach ihrer Masse. Das neutrale Wino \tilde{W}^0 , das Bino \tilde{B}^0 sowie die neutralen Higgsinos \tilde{h}_u^0 und \tilde{h}_d^0 geben vier Neutralinos, $\chi_0^1, \dots, \chi_0^4$. Dabei handelt es sich um Majorana-Fermionen, aufsteigend sortiert nach ihrer Masse.

Gluinos

Da die $SU(3)$ ungebrochen bleibt und die Gluinos die einzigen Fermionen mit Farbladung sind, mischen sie mit keinem weiteren Teilchen.

Sleptonen und Squarks

In allgemeinen supersymmetrischen Theorien mischen jeweils alle sechs geladenen Sleptonen, alle drei Sneutrinos, alle sechs up-artigen Squarks und alle sechs down-artigen Squarks. Im mSUGRA-Modell führt aber die Diagonalität der skalaren Massen und trilinearen Kopplungen dazu, dass keine Mischung zwischen den Familien auftritt. Wird weiterhin angenommen, dass die Yukawa-Kopplungen nur für die dritte Generation nicht vernachlässigbar sind, so mischen nur für $f = b, t, \tau$ die Felder \tilde{f}_L und \tilde{f}_R zu \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 .

3 Observablen

Um ein theoretisches Modell zu testen, müssen Observablen ausgewählt werden, die sensitiv auf dieses Modell sind. Dabei werden häufig Pseudo-Observablen benutzt. Dies sind Größen, die nicht direkt gemessen werden, sondern unter bestimmten theoretischen Annahmen aus den eigentlichen Messwerten extrahiert werden. Sie sollten so definiert sein, dass sie eine klare theoretische Bedeutung haben und nicht von dem konkreten Messaufbau, z.B. Detektoreffekten, abhängen. Auf der anderen Seite ist darauf zu achten, dass die für die Entfaltung verwendeten theoretischen Annahmen allgemein genug sind, um einen Vergleich mit einer möglichst großen Klasse theoretischer Modelle zu ermöglichen. Die Wahl einer geeigneten Definition der (Pseudo-)Observablen ist daher kritisch für den Vergleich von Experiment und Theorie.

In diesem Kapitel werden die gewählten (Pseudo-)Observablen definiert und darauf eingegangen, warum sie Supersymmetrie einschränken. Dabei werden drei Klassen von Observablen unterschieden: Abschnitt 3.1 führt die Relikt-Dichte Dunkler Materie ein, eine kosmologische Größe. Abschnitt 3.2 beschäftigt sich mit Experimenten, die mit Energien deutlich unterhalb der Teraskala durchgeführt wurden. Abschnitt 3.3 behandelt schließlich Messungen am LHC. Die in dieser Arbeit benutzten Messwerte der Observablen sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Sie stimmen mit den in [6] verwendeten überein.

3.1 Relikt-Dichte Dunkler Materie

Dunkle Materie ist Materie, die weder selbst leuchtet noch Licht reflektiert. Ihre Dichte ist eine kosmologische Größe, deren Existenz sich ebenso wie die Existenz Dunkler Energie in den letzten Jahren im Rahmen der Entwicklung des sogenannten kosmologischen Standardmodells [35] etabliert hat. Grundzüge dessen werden in 3.1.2 vorgestellt. Zuvor werden in 3.1.1 sehr knapp Hinweise auf die Existenz Dunkler Materie genannt. Abschnitt 3.1.3 stellt die verschiedenen denkbaren Formen Dunkler Materie vor und erläutert, warum die Dunkle Materie im Standardmodell nicht erklärt werden kann. Dies ist in vielen supersymmetrischen Theorien anders. Im mSUGRA-Modell ist in weiten Teilen des Parameterraums

die vorhergesagte Dichte Dunkler Materie sogar zu groß. Abschnitt 3.1.4 beschäftigt sich mit diesem Problem.

3.1.1 Evidenz für Dunkle Materie

Den ersten Hinweis auf die Existenz Dunkler Materie gab Fritz Zwicky 1933. Er bemerkte eine Diskrepanz zwischen den beobachteten Geschwindigkeiten und der sichtbaren Masse im Coma-Galaxienhaufen und schlussfolgerte [36]:

„Falls sich dies bewahrheiten sollte, würde sich also das überraschende Resultat ergeben, dass dunkle Materie in sehr viel größerer Dichte vorhanden ist als leuchtende Materie.“

Es dauerte mehr als 30 Jahre, bis ein ähnlicher Effekt erneut beobachtet wurde, diesmal auf einer kleineren Skala. Vera Rubin beobachtete, dass die Umlaufgeschwindigkeiten von Sternen in Spiralgalaxien mit zunehmendem Radius wesentlich langsamer abnehmen als es sich aufgrund der sichtbaren Materie ergeben würde [37].

Weitere Evidenz ergab sich durch die Beobachtung von Gravitationslinseneffekten, zum Beispiel am Galaxienhaufen Abell 1689 [38]. Dabei wird das Bild von Galaxien, die sich hinter dem Galaxienhaufen befinden, durch dessen Masse verzerrt. Es stellte sich heraus, dass mehr Masse als die sichtbare vorhanden sein muss, um die beobachtete Verzerrung zu erklären.

Die genauesten Messungen der Dichte Dunkler Materie stammen heute aus Fits des kosmologischen Standardmodells an die Messungen der Mikrowellenhintergrundstrahlung durch den 2001 gestarteten Satelliten WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [35]. Es wird in Grundzügen im nächsten Abschnitt gemäß [1] vorgestellt.

3.1.2 Das kosmologische Standardmodell

Auf kosmologischen Skalen ist die Gravitation die alles dominierende Kraft. Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ([39], [40]) wird sie durch eine Krümmung des Raumes hervorgerufen, die durch die Einsteingleichungen

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

beschrieben wird. Dabei ist G_N die Gravitationskonstante, $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor, $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Krümmungstensor, R der Krümmungsskalar, $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor und Λ die kosmologische Konstante. Einstein schrieb Λ auf die linke Seite der Gleichungen, interpretierte Λ also als eine Änderung des Gravitationsgesetzes. Er führte sie ein, um ein

statisches, nicht expandierendes Universum zu erklären. Mit der Entdeckung der Expansion des Universums wurde der Parameter vielfach zunächst als nicht mehr notwendig angesehen, d.h. angenommen, dass er verschwindet. Dass Λ heute meistens auf die rechte Seite der Einstein-Gleichungen geschrieben wird, liegt daran, dass die kosmologische Konstante als ein Beitrag zur Energiedichte des Universums aufgefasst wird, als sogenannte Vakuum- oder Dunkle Energie. Man definiert daher die Vakuumenergiedichte ρ_0 durch

$$\Lambda \equiv 8\pi G_N \rho_0.$$

Der Umstand, dass die Vakuumenergiedichte, wie sie typischerweise von Quantenfeldtheorien vorhergesagt wird, rund 100 Größenordnungen über dem gemessenen Wert liegt, wird als das Problem der kosmologischen Konstante bezeichnet [41].

Die Annahme eines homogenen und isotropen Universums führt zum Ansatz der Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right].$$

Dabei ist $R(t)$ der Skalenfaktor, der die Expansion des Universums beschreibt, und k die Krümmungskonstante. Der Wert $k = 1$ entspricht einem geschlossenen Universum, $k = 0$ einem flachen und $k = -1$ einem offenen.

Weiterhin führt die Annahme, dass sich der Materieinhalt des Universums auf großen Skalen wie eine perfekte Flüssigkeit verhält, dazu, dass der Energie-Impuls-Tensor gemäß

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu$$

mit $u = (1, 0, 0, 0)$ durch lediglich zwei Größen parametrisiert werden kann. Dies sind der Druck p und die Energiedichte ρ .

Mit diesen beiden Annahmen werden die Einsteingleichungen zu den Friedmanngleichungen ([42], [43]).

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G_N \rho}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p).$$

Dabei wird $H = H(t)$ als Hubble-Parameter bezeichnet. Der skalierte Hubble-Parameter h wird durch

$$H \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

definiert. Als kritische Energiedichte ρ_c wird die Energiedichte bezeichnet, für die sich bei

verschwindender kosmologischer Konstante ein flaches Universum ergeben würde, also

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G_N}.$$

Mit ihr definiert man die Dichteparameter

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$$

sowie

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{\Lambda}{3H^2}.$$

Mit ihnen lautet die erste Friedmanngleichung

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{R^2 H^2}.$$

Ω kann nun zerlegt werden in Beiträge, die von Materie oder Strahlung kommen:

$$\Omega = \Omega_r + \Omega_M.$$

Ω_r lässt sich aus der Energie der Mikrowellenhintergrundstrahlung bestimmen und ist zur heutigen Zeit vernachlässigbar. Die Konfidenzregionen von Ω_M und Ω_Λ , wie sich aus der Mikrowellenhintergrundstrahlung sowie Supernovae- und Galaxienbeobachtungen ergeben, zeigt Abbildung 3.1. Insgesamt wird ein flaches Universum bevorzugt, dessen Energie zu ungefähr 70% Dunkle Energie ist und zu rund 30% in Form von Materie vorliegt.

3.1.3 Kandidaten für Dunkle Materie

Die Energiedichte der Materie lässt sich in die folgenden vier Komponenten zerlegen:

$$\Omega_M = \underbrace{\Omega_{b,\text{hell}} + \Omega_{b,\text{dunkel}}}_{\Omega_b} + \underbrace{\Omega_{\text{CDM}} + \Omega_{\text{HDM}}}_{\Omega_{\text{DM}}}.$$

Ω_b beschreibt dabei die baryonische Energiedichte, die durch aus Atomen bestehende astronomische Objekte hervorgerufen wird. Sie besteht aus dem offensichtlichen leuchtenden Anteil $\Omega_{b,\text{hell}}$, sowie möglicherweise einem dunklen Anteil $\Omega_{b,\text{dunkel}}$, der zu Ω_{DM} beiträgt. Astronomische Objekte, die zu $\Omega_{b,\text{dunkel}}$ beitragen, werden MACHOs (Massive Astrophysical Compact Halo Object) genannt. Nach ihnen wurde zum Beispiel mit dem Mikrolinseneffekt gesucht [44].

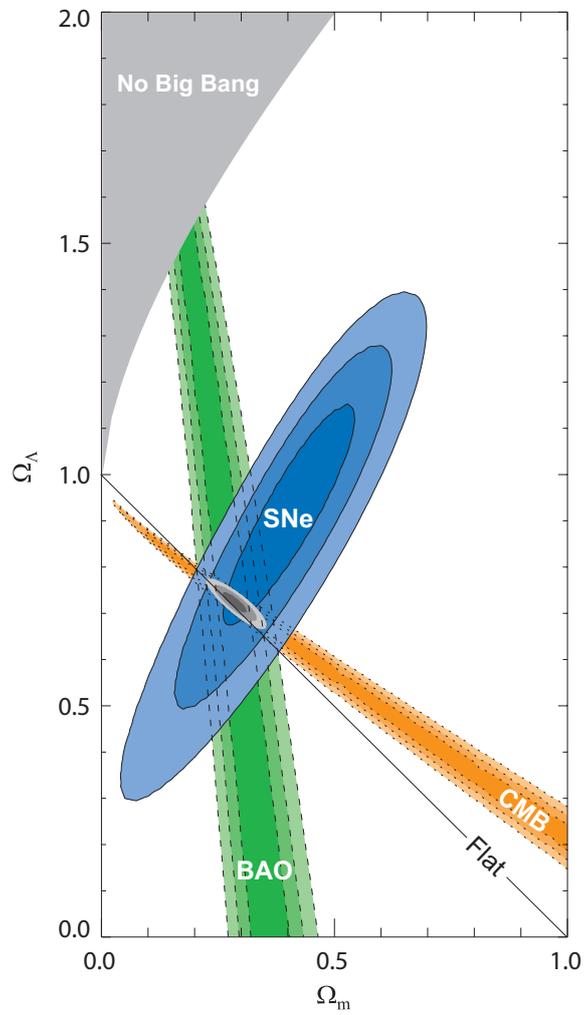


Abbildung 3.1: Konfidenzbereiche von 68.3%, 95.4% und 99.7% in der $\Omega_\Lambda - \Omega_M$ - Ebene, wie sie sich aus der Mikrowellenhintergrundstrahlung sowie Beobachtungen von Supernovae und Galaxien ergeben (aus [1])

Hierbei müsste ein MACHO, das sich vor einem Stern entlang bewegt, dessen Licht verzerren. Solche Effekte wurden beobachtet, jedoch konnte ausgeschlossen werden, dass MACHOs den Hauptbestandteil der Dunklen Materie ausmachen [45]. Als weitere Kandidaten für Dunkle Materie kommen massive Elementarteilchen in Betracht, die weder elektromagnetisch, noch stark wechselwirken (WIMPs, weakly interacting massive particles). Da wir heute wissen, dass Neutrinos eine Masse haben, wurde diskutiert, ob sie die Dunkle Materie bilden können. Es besteht jedoch die vorherrschende Meinung, dass Neutrinos zum Zeitpunkt der beginnenden Strukturbildung im Universum relativistische Geschwindigkeit hatten und damit zur heißen Dunklen Materie (HDM) beitragen würden. Der überwiegende Teil der Dunklen Materie muss aber kalt sein. Andernfalls hätten die relativistischen Teilchen entstehende Strukturen auf relativ kleinen Skalen zerstört. Die Strukturbildung wäre dann gemäß eines zwischenzeitlich diskutierten Top-Down-Prozesses erfolgt, bei dem sich erst sehr große Strukturen bilden, die später in kleinere zerfallen. Computersimulationen zeigen hingegen, dass sich die Strukturen, wie wir sie heute sehen, sehr gut mit dem gegensätzlichen Bottom-Up-Prozess unter Anwesenheit von kalter Dunkler Materie erklären lassen [46].

Damit gibt es im Standardmodell keinen geeigneten Kandidaten für Dunkle Materie, was als experimentelle Widerlegung des Standardmodells interpretiert werden kann. Allerdings gibt es auch Vorschläge, die Beobachtung Dunkler Materie dadurch zu erklären, dass Einsteins Gravitationsgesetz abgeändert werden muss.

Es ist die Observable Λ_{CDM} , multipliziert mit dem skalierten Hubble-Parameter, die in dieser Arbeit verwendet wird.

Wegen der enthaltenen Dunklen Energie und kalten Dunklen Materie wird das hier vorgestellte kosmologische Standardmodell auch das Λ_{CDM} -Modell genannt [35].

3.1.4 Dunkle Materie im mSUGRA-Modell

Im Gegensatz zum Standardmodell haben R-Paritäts-erhaltende SUSY-Modelle mit dem massiven, nur schwach wechselwirkenden χ_1^0 einen Dunkle-Materie-Kandidaten, wenn es das LSP ist. In dieser Arbeit werden deshalb nur Parameterpunkte des mSUGRA-Modells zugelassen, in denen diese Bedingung erfüllt ist. Weiter wird angenommen, dass nur das χ_1^0 zur kalten Dunklen Materie beiträgt.

Üblicherweise wird angenommen, dass bei hohen Temperaturen im frühen Universum die χ_1^0 - Produktion und -Annihilation im Gleichgewicht war. Mit fortschreitender Zeit sinkt dann die Temperatur, so dass der Gleichgewichtswert der Teilchendichte n abnimmt. Er sinkt dabei relativ moderat ($n \sim T^3$), solange die durchschnittliche Temperatur über der

Masse des χ_1^0 liegt. Sinkt die Temperatur unterhalb diesen Wert, fällt der Gleichgewichtswert n hingegen exponentiell mit sinkender Temperatur ($n \sim e^{-m/T}$).

Würde der Gleichgewichtszustand bis heute anhalten, wäre die Relikt-Dichte somit heute verschwindend gering. Es wird aber angenommen, dass es einen Freeze-out-Punkt gibt, ab dem die Annihilationsrate aufgrund der zunehmenden Expansion des Universums nicht mehr groß genug ist, um den Gleichgewichtszustand aufrecht zu erhalten [3]. Ab diesem Zeitpunkt bliebe die Zahl der χ_1^0 dann ungefähr konstant. Je größer die Annihilationswirkungsquerschnitte sind, umso später tritt dieser Punkt ein (siehe Abbildung 3.4). Für den heutigen Wert der Relikt-Dichte ist also entscheidend, welche Annihilationsprozesse mit welchem Wirkungsquerschnitt für das χ_1^0 zur Verfügung stehen.

Abbildung 3.3 zeigt schematisch einige Regionen in der M_0 - $M_{1/2}$ -Ebene, die mit dem beobachteten Wert von Λ_{CDM} konsistent sind. Abbildung 3.2 zeigt Tree-Level-Diagramme korrespondierender Annihilationsprozesse.

In der Bulk-Region bei kleinem M_0 und kleinem $M_{1/2}$ annihilieren zwei χ_1^0 durch Sfermion-Austausch in ein Fermion-Antifermion-Paar. Für größere Werte von M_0 und $M_{1/2}$ ist dieser Prozess durch die steigende Sfermionmasse unterdrückt. Hier sind andere Annihilationsmechanismen notwendig.

In der Fokus-Punkt-Region hat das χ_1^0 einen großen Wino-Anteil, so dass zwei χ_1^0 unter Chargino-Austausch in zwei W-Bosonen annihilieren können.

In der Rapid-Annihilation- oder Higgs-Funnel-Region gilt näherungsweise $m_{A^0} = 2m_{\chi_1^0}$, so dass zwei χ_1^0 resonant über ein H_0 oder A_0 in ein Fermion-Antifermion-Paar annihilieren können.

In der $\tilde{\tau}$ - Annihilationsregion schließlich ist das $\tilde{\tau}$ ungefähr so leicht wie das χ_1^0 . Dies führt dazu, dass der Zeitpunkt, bei dem die Temperatur unterhalb die Masse des χ_1^0 fällt, zugleich auch erst der Zeitpunkt ist, bei dem die Temperatur unter die $\tilde{\tau}$ Masse fällt. Daher sind zu diesem Zeitpunkt noch ausreichend $\tilde{\tau}$'s vorhanden, so dass die Koannihilation von χ_1^0 und $\tilde{\tau}$ in τ und γ signifikant zum Annihilationswirkungsquerschnitt beiträgt.

3.2 Niedrig-Energie-Observablen

Als Niedrig-Energie-Observablen werden Messgrößen bezeichnet, die bei Experimenten bestimmt wurden, die mit Energien deutlich unterhalb der TeV-Skala durchgeführt wurden. Wie aus solchen Versuchen im Nachhinein bekannt ist, reicht diese Energie nicht aus, um reale supersymmetrische Teilchen zu erzeugen. Ihre Sensitivität für Supersymmetrie erhalten die Niedrig-Energie-Observablen daher einzig durch virtuelle supersymmetrische

Observable	Wert	Fehler	Ref
$\Omega_{\text{CDM}}h^2$	0.1099	$0.0062 \oplus 0.012$	[35]
$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}}$	30.2×10^{-10}	$8.8 \times 10^{-10} \oplus 2.0 \times 10^{-10}$	[47, 48]
$C(\epsilon_K)$	0.92	0.14	[49]
$\overline{\text{BR}}(K \rightarrow \mu\nu)$	1.008	0.014	[50]
$\overline{\text{BR}}(K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu})$	< 4.5		[51]
$\overline{\text{BR}}(b \rightarrow s\gamma)$	1.117	$0.076 \oplus 0.096$	[52]
$\overline{\text{BR}}(b^- \rightarrow \tau^-\bar{\nu})$	1.15	0.40	[53]
$\overline{\text{BR}}(B_s \rightarrow X_s ll)$	0.99	0.32	[52]
$\mathcal{B}(B_s \rightarrow \mu\mu)$	$< 4.7 \times 10^{-8}$		[52]
$\mathcal{B}(B_d \rightarrow \mu\mu)$	$< 2.3 \times 10^{-8}$		[52]
$\overline{\Delta m}_{B_s}$	1.11	$0.01 \oplus 0.32$	[49]
$\overline{\Delta m}_{B_s}/\overline{\Delta m}_{B_d}$	1.09	$0.01 \oplus 0.16$	[49, 52]
Γ_Z	2.4952 GeV	$0.0023 \text{ GeV} \oplus 0.001 \text{ GeV}$	[54]
σ_{had}^0	41.540 nb	0.037 nb	[54]
R_l^0	20.767	0.025	[54]
R_b^0	0.21629	0.00066	[54]
R_c^0	0.1721	0.0030	[54]
A_l	0.1513	0.0021	[54]
A_τ	0.1465	0.0032	[54]
A_b	0.923	0.020	[54]
A_c	0.670	0.027	[54]
$A_{\text{FB}}^{0,l}$	0.0171	0.0010	[54]
$A_{\text{FB}}^{0,b}$	0.0992	0.0016	[54]
$A_{\text{FB}}^{0,c}$	0.0707	0.0035	[54]
$\sin^2\theta_{\text{eff}}^l$	0.2324	0.0012	[54]
m_h	$> 114.4 \text{ GeV}$	$0 \oplus 3.0 \text{ GeV}$	[55, 56, 57]
m_W	80.398 GeV	$0.025 \text{ GeV} \oplus 0.010 \text{ GeV}$	[58]

Tabelle 3.1: Messwerte der Niedrig-Energie-Observablen sowie der Relikt-Dichte Dunkler Materie

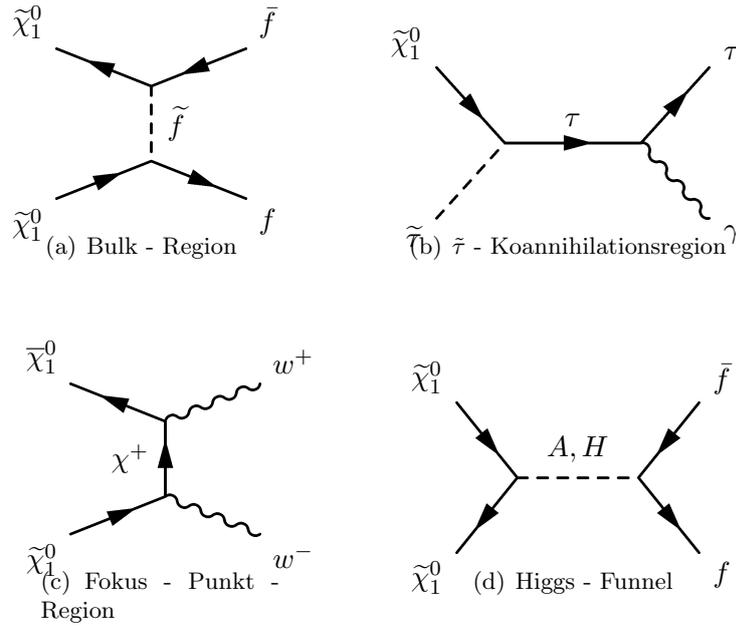


Abbildung 3.2: Tree - Level - Diagramme von in verschiedenen mSUGRA - Parameterbereichen relevanten Annihilationsprozessen des χ_1^0 .

Teilchen, die in Schleifendiagrammen auftreten. Im Folgenden werden die verschiedenen Observablen definiert und die Ursache ihrer Sensitivität für Supersymmetrie näher begründet.

3.2.1 Anomales magnetisches Moment des Muons

Ein Teilchen der Ladung q und der Masse m erhält durch einen Drehimpuls \vec{L} ein magnetisches Dipolmoment von $\vec{\mu}_L = \frac{q}{2m}\vec{L}$. Ähnlich führt ein Spin \vec{S} zu einem magnetischen Dipolmoment $\vec{\mu}_S = g\frac{q}{2m}\vec{S}$. Die Dirac-Gleichung als quantenmechanische Wellengleichung für Teilchen mit Spin 1/2 sagt dabei einen g -Faktor von 2 voraus [22]. Dies war historisch einer der größten Erfolge der Dirac-Gleichung, misst man doch experimentell einen Wert nahe bei 2. Die Abweichung von diesem Wert wird beschrieben durch das anomale magnetische Moment $a \equiv \frac{g-2}{2}$. Quantenfeldtheorien ergeben ein nicht verschwindendes anomales magnetisches Moment aufgrund von Schleifendiagrammen, und die Berechnung des anomalen magnetischen Moment des Elektrons a_e war wiederum ein großer Erfolg der Quantenelektrodynamik [59].

Ist M die Masse des Teilchens in der Schleife, so sind die Schleifendiagramme im Allgemeinen mit einem Faktor m^2/M^2 unterdrückt. Sie tragen daher zum anomalen magnetischen Moment des Muons a_μ um einen Faktor von $\frac{m_\mu}{m_e} \approx 40000$ mehr bei als zu a_e [60]. Dies er-

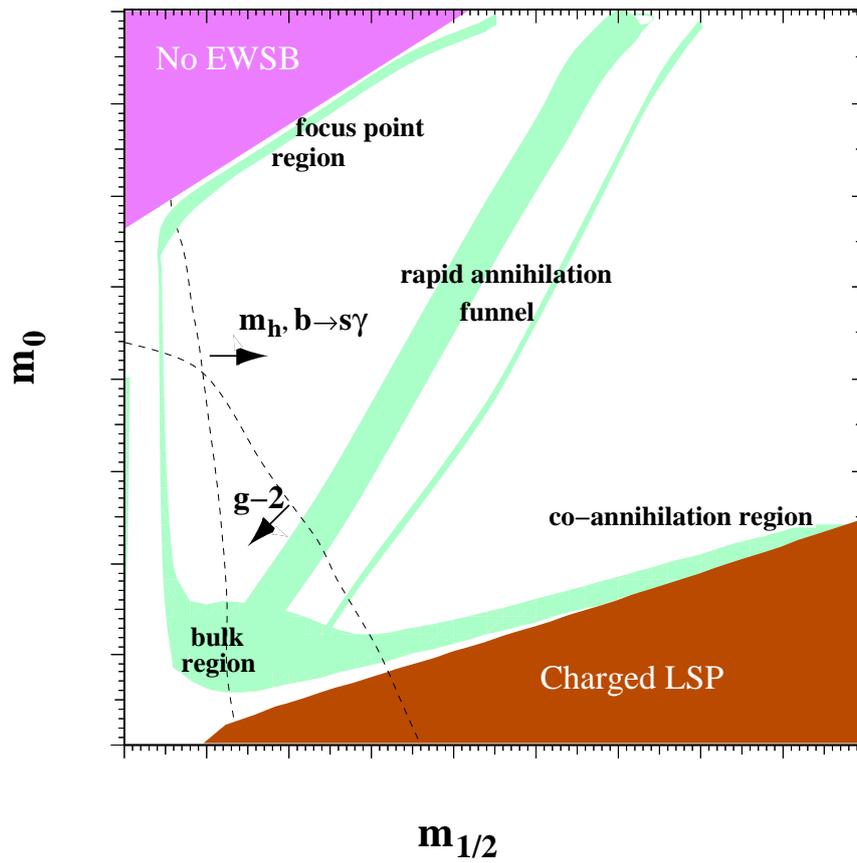


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung von mSUGRA - Parameterbereichen, die aufgrund unterschiedlicher Annihilationsmechanismen mit der beobachteten Relikt - Dichte verträglich sind (aus [2]).

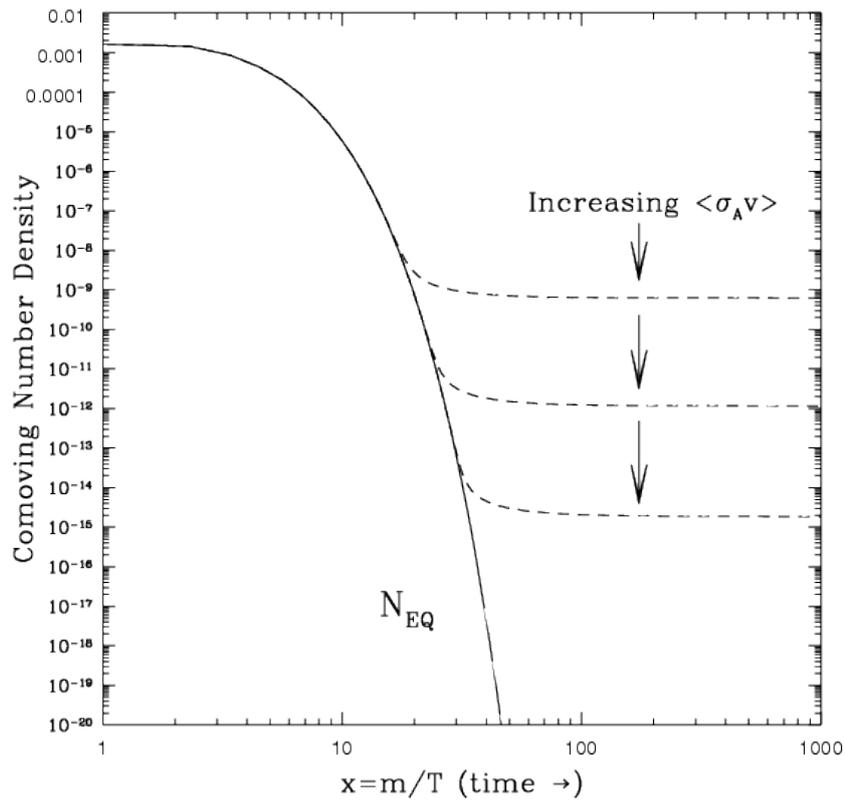


Abbildung 3.4: Teilchenzahldichte eines WIMPs in Abhängigkeit vom Verhältnis seiner Masse zur Temperatur entsprechend dem Gleichgewichtszustand (durchgezogene Linie) sowie unter Berücksichtigung eines Freeze-out-Punktes aufgrund der Expansion des Universums (gestrichelte Linie) (aus [3]).

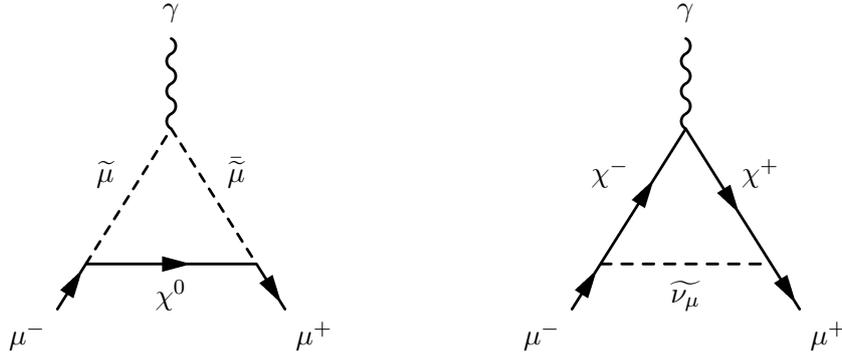


Abbildung 3.5: Supersymmetrische Schleifendiagramme, die zum anomalen magnetischen Moment des Myons beitragen.

schwert einerseits die Berechnung durch nicht zu vernachlässigende hadronische Beiträge, macht a_μ andererseits aber wesentlich sensitiver für neue Physik.

Abbildung 3.5 zeigt zwei wichtige Diagramme im Falle von Supersymmetrie. Ihre Beiträge werden umso kleiner, je schwerer die Teilchen in der Schleife sind, für mSUGRA heißt das, je größer M_0 und $M_{1/2}$ sind.

Insgesamt ergibt sich nach [60] für die supersymmetrischen Beiträge näherungsweise eine Abhängigkeit von

$$a_\mu^{\text{SUSY}} \sim \text{sgn}(\mu) \tan \beta M_{\text{SUSY}}^{-2}. \quad (3.1)$$

Da sich der hadronische Beitrag nicht perturbativ berechnen lässt, ist der theoretische Wert des Standardmodells a_μ^{SM} nicht unumstritten. Abbildung 3.6 zeigt einige Ergebnisse für die Differenz $a_\mu - a_\mu^{\text{SM}}$ der letzten Jahre. Es besteht jedoch Einigkeit darüber, dass der experimentelle Wert a_μ größer ist als die Standardmodellvorhersage a_μ^{SM} . Daher präferiert a_μ ein positives Vorzeichen von μ und in dieser Arbeit wird nur dieser Fall untersucht.

3.2.2 K- und B-Physik

Die K- und B-Physik beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Kaonen und B-Mesonen. Kaonen sind Mesonen, die ein Strange-Quark oder -Antiquark, aber kein Bottom- oder Charm-(Anti-)Quark enthalten. B-Mesonen sind Mesonen, die ein Bottom-Quark oder -Antiquark enthalten. Viele aufsehenerregende Effekte wurden in diesen Systemen beobachtet, zum Beispiel

- Flavour-Changing-Neutral-Current-Reaktionen (FCNR-Reaktionen)
- Mischung

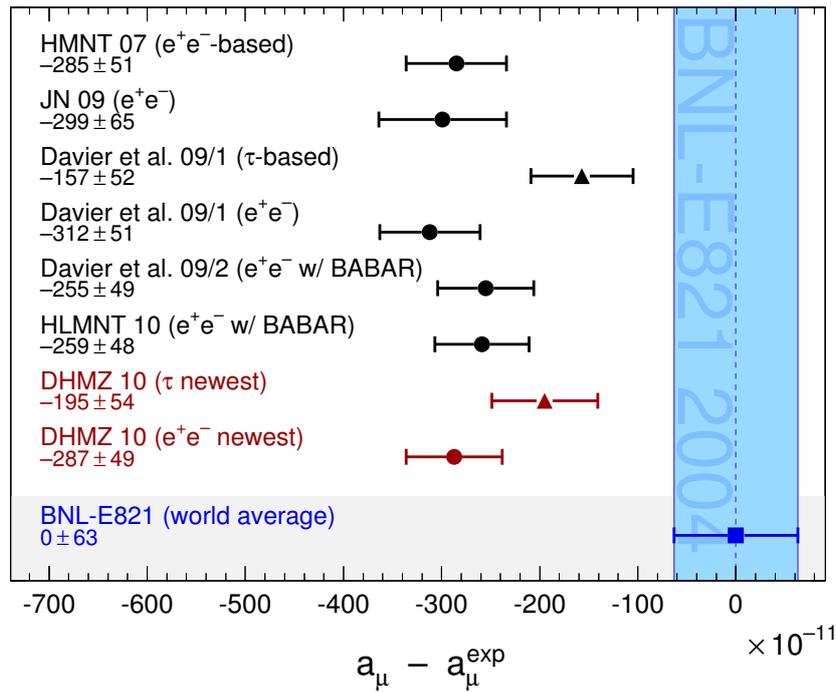


Abbildung 3.6: Ergebnisse für die Differenz $a_\mu^{\text{SM}} - a_\mu$ verschiedener Kollaborationen zu verschiedenen Zeitpunkten innerhalb der letzten Jahre (aus [4]).

- CP - Verletzung.

Im Folgenden werden sie am Beispiel des Systems der neutralen Kaonen erläutert. Dieses war auch das erste, in dem eine CP -Verletzung nachgewiesen wurde. Anschließend werden die weiteren benutzten K - und B - Observablen eingeführt.

Das K^0 - System

Die Eigenzustände bezüglich der starken Wechselwirkung, K^0 und sein Antiteilchen \bar{K}^0 , können sich im Standardmodell durch die Box-Diagramme der schwachen Wechselwirkung aus Abbildung 3.7 ineinander umwandeln.

Der dort sichtbare Übergang von einem Down-Quark in ein Strange-Quark stellt eine FCNC - Reaktion dar.

In supersymmetrischen Theorien tragen weitere Diagramme bei. Abbildung 3.9 zeigt zwei Beispiele. Das Kreuz in Abbildung 3.9 markiert dabei einen Übergang, der durch ein nichtdiagonales Massenmatrixelement verursacht wird und in mSUGRA ausgeschlossen ist. Das untere Diagramm in Abbildung 3.9 hingegen tritt auch in mSUGRA auf. An den

Vertices stehen genau die Einträge der CKM-Matrix des Standardmodells, so dass die Beiträge von der gleichen Größenordnung sind.

Die Mischung führt dazu, dass sich die Eigenzustände bezüglich der elektroschwachen Wechselwirkung von K^0 und \bar{K}^0 unterscheiden.

Wäre die CP-Operation eine Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung, hätte das zur Folge, dass

1. die Eigenzustände bezüglich der elektroschwachen Wechselwirkung, genannt K_S und K_L , mit den Eigenzuständen bezüglich der CP-Operation, genannt K_1 und K_2 , identisch wären.
2. der CP-gerade Zustand K_1 in zwei, nicht aber in drei Pionen zerfallen würde, im Gegensatz zum CP-ungeraden Zustand K_2 .

Der Grad der CP-Verletzung lässt sich daher messen durch die Verhältnisse

$$\eta_{+-} = \frac{A(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{A(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)}$$

$$\eta_{00} = \frac{A(K_L \rightarrow \pi^0\pi^0)}{A(K_S \rightarrow \pi^0\pi^0)}.$$

Ist 1. nicht erfüllt, spricht man von indirekter CP-Verletzung, da $\eta \neq 0$ durch die CP-verletzende Mischung verursacht wird. Ist 2. nicht erfüllt, spricht man hingegen von direkter CP-Verletzung, da $\eta \neq 0$ durch einen CP-verletzenden Zerfall verursacht wird.

Parametrisiert man η_{+-} und η_{00} gemäß

$$\eta_{+-} = \epsilon + \epsilon'$$

$$\eta_{00} = \epsilon - 2\epsilon',$$

so ist ein nicht verschwindendes ϵ' ein Nachweis direkter CP-Verletzung. Ohne direkte

CP-Verletzung wäre nämlich

$$\begin{aligned}
 \eta_{+-} &= \frac{A(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{A(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)} \\
 &= \frac{A(K_1 \rightarrow \pi^+\pi^-) \langle K_1 | K_L \rangle}{A(K_1 \rightarrow \pi^+\pi^-) \langle K_1 | K_S \rangle} \\
 &= \frac{\langle K_1 | K_L \rangle}{\langle K_1 | K_S \rangle} \\
 &= \frac{A(K_1 \rightarrow \pi^0\pi^0) \langle K_1 | K_L \rangle}{A(K_1 \rightarrow \pi^0\pi^0) \langle K_1 | K_S \rangle} \\
 &= \frac{A(K_L \rightarrow \pi^0\pi^0)}{A(K_S \rightarrow \pi^0\pi^0)} \\
 &= \eta_{00}
 \end{aligned}$$

und damit $\eta_{+-} = \eta_{00}$ und $\epsilon' = 0$.

Der Betrag von ϵ ist proportional zum Imaginärteil der Amplitude $A(K^0 \rightarrow \bar{K}^0)$. Das Verhältnis

$$C_\epsilon = \frac{\text{Im}(A(K^0 \rightarrow \bar{K}^0))}{\text{Im}(A(K^0 \rightarrow \bar{K}^0))^{\text{SM}}}$$

wird in dieser Arbeit als Observable benutzt.

Weitere K- und B-Observablen

Analoge Bemerkungen wie für die neutralen Kaonen gelten für das B_s^0 bzw B_d^0 - System. Die entsprechenden Standardmodell - Boxdiagramme der Mischung sind in Abbildung 3.8 gezeigt. Aus den Oszillationsfrequenzen lassen sich die Massenunterschiede Δm_s und Δm_d bestimmen, die ebenfalls als Observablen benutzt werden. Außerdem werden die Verzweungsverhältnisse folgender Zerfälle verwendet:

- $b \rightarrow s\gamma$
- $B_s \rightarrow \mu^+\mu^-$
- $B_d \rightarrow \mu^+\mu^-$
- $B_s \rightarrow X_s l^+ l^-$
- $B^- \rightarrow \tau^- \bar{\nu}_\tau$
- $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$
- $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$

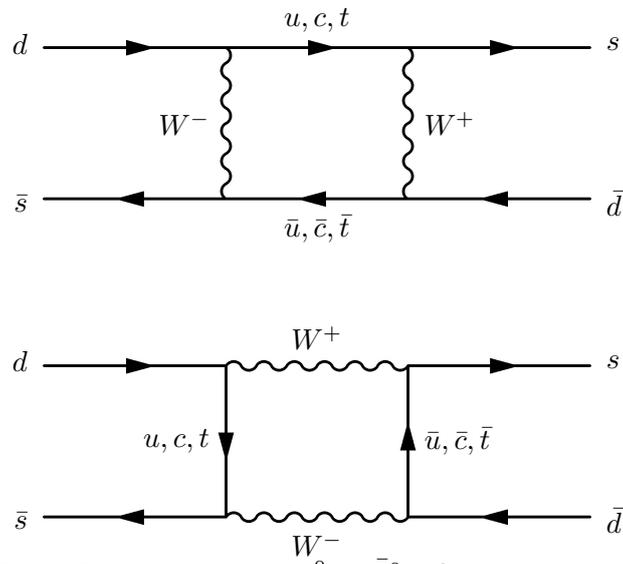


Abbildung 3.7: Box - Diagramme der $K^0 - \bar{K}^0$ - Oszillation im Standardmodell

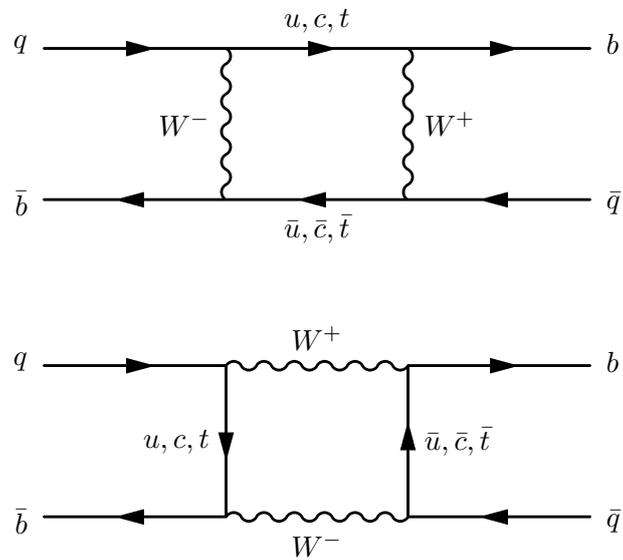


Abbildung 3.8: Box - Diagramme der $B_q - \bar{B}_q$ - Oszillation im Standardmodell, mit $q = s, d$.

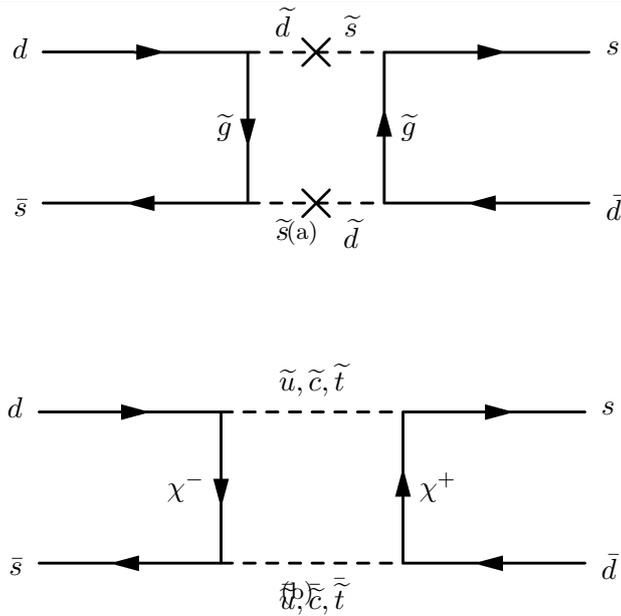


Abbildung 3.9: Box - Diagramme der $K^0 - \bar{K}^0$ - Oszillation in supersymmetrischen Theorien

3.2.3 Messungen bei der Z-Resonanz

Messungen bei der Z-Resonanz wurden sowohl am LEP-Beschleuniger als auch am SLC-Beschleuniger durchgeführt. Unter anderem wurden die folgenden Pseudoobservablen definiert.

Dabei bezeichnen \mathcal{G}_V^f und \mathcal{G}_A^f die effektiven Vektor- bzw- Axialvektorkopplungen wie sie im $Zf\bar{f}$ - Vertex $\gamma_\mu(\mathcal{G}_V^f - \mathcal{G}_A^f\gamma_5)$ auftreten.

- Die Masse des Z^0 - Bosons m_Z
- Die totale Breite des Z^0 - Bosons

$$\Gamma_Z = \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_{had} + \Gamma_{inv}$$

- Der 'hadronische Pol - Wirkungsquerschnitt'

$$\sigma_{had}^0 \equiv \frac{12\pi}{m_Z^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{had}}{\Gamma_Z^2}$$

- Die Verhältnisse

$$R_f^0 \equiv \frac{\Gamma_{had}}{\Gamma_{ff}} \quad \text{mit } f = e, \mu, \tau$$

sowie unter der Annahme von Leptonuniversalität das kombinierte Verhältnis

$$R_l^0 \equiv \frac{\Gamma_{had}}{\Gamma_l}.$$

Hierbei ist Γ_l nicht der Durchschnitt der Breiten Γ_{ff} , $f = e\mu\tau$, da diese sich auch unter der Annahme von Leptonuniversalität aufgrund der unterschiedlichen Massen unterscheiden, sondern die Partialbreite $\Gamma(Z^0 \rightarrow l^-l^+)$ für ein hypothetisches masseloses geladenes Lepton l .

- Die Verhältnisse

$$R_q^0 \equiv \frac{\Gamma_{q\bar{q}}}{\Gamma_{had}} \quad \text{mit } q = b, c.$$

- Die Asymmetrie-Parameter

$$A_f \equiv 2 \frac{\operatorname{Re} \frac{\mathcal{G}_V^f}{\mathcal{G}_A^f}}{1 + \left(\operatorname{Re} \frac{\mathcal{G}_V^f}{\mathcal{G}_A^f} \right)^2} \quad \text{mit } f = e, \mu, \tau, b, c$$

sowie unter der Annahme von Leptonuniversalität der kombinierte Wert A_l

- Die Vorwärts-Rückwärtsasymmetrie

$$A_{FB}^{0,f} \equiv \frac{3}{4} A_e A_f \quad \text{mit } f = e, \mu, \tau, b, c$$

sowie unter der Annahme von Leptonuniversalität der kombinierte Wert $A_{FB}^{0,l}$

- Der Sinus des effektiven Weinberg-Winkels

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\mathcal{G}_V^f}{\mathcal{G}_A^f} \right) \equiv 1 - 4|Q_f| \sin^2 \theta_{\text{eff}}^f.$$

Schreibt man

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_V^f &= \sqrt{\mathcal{R}_f} (T_3^f - 2Q_f \mathcal{K}_f \sin^2 \theta_W) \\ \mathcal{G}_A^f &= \sqrt{\mathcal{R}_f} T_3^f, \end{aligned}$$

so gilt

$$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^f \equiv \operatorname{Re}(\mathcal{K}_f).$$

Die mit einer hochgestellten Null gekennzeichneten Observablen sind typische Beispiele für Pseudo-Observablen mit einer direkten experimentellen Entsprechung. So entsprechen



Abbildung 3.10: Supersymmetrische Feynman - Diagramme, die zum $Zf\bar{f}$ - Vertex beitragen

den Verhältnissen R^0 die Verhältnisse R der jeweiligen Wirkungsquerschnitte, wenn bei letzteren Strahlungskorrekturen, γ - Austausch und $\gamma - Z$ - Interferenz vernachlässigt werden. Gleiches gilt für A_{FB}^0 und die experimentelle Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

$$A_{\text{FB}}^0 = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B}.$$

Dabei bezeichnet σ_F den Wirkungsquerschnitt für Vorwärtstreuung und σ_B den Wirkungsquerschnitt für Rückwärtstreuung des jeweiligen Teilchens.

3.2.4 W-Masse und Higgsmassenlimit

Außerdem werden in dieser Arbeit die W-Bosonen-Masse und das Higgsmassenlimit benutzt. Das experimentelle Higgsmassenlimit hängt davon ab, in welchem Modell und mit welchen Parametern die Daten interpretiert werden. Das Programm HiggsBounds [61] ermittelt für gegebenen Parameterwert dieses Limit.

3.3 LHC-Observablen

Während man die präzise Messung der Niedrig-Energie-Observablen aufgrund ihrer Sensitivität auf virtuelle supersymmetrische Teilchen als indirekte SUSY-Suche bezeichnet, handelt es sich bei den betrachteten Messungen am Large Hadron Collider (LHC) um sogenannte direkte Suchen. Bei diesen wird nach in Proton-Proton-Kollisionen entstandenen realen supersymmetrischen Teilchen gesucht. Je höher dabei die Schwerpunktsenergie ist, umso schwerere Teilchen können erzeugt werden. Je höher die Luminosität ist, umso seltenere Prozesse können entdeckt werden.

Der LHC, der in den 27 km langen ehemaligen LEP-Tunnel nahe Genf gebaut wurde, ist darauf ausgelegt, eine Schwerpunktsenergie von 14 TeV und eine instantane Luminosität

von $10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ zu erreichen. Im Jahr 2010 lief er bei einer Schwerpunktsenergie von 7 TeV und erreichte eine instantane Luminosität von bis zu $2 \cdot 10^{31} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Nach einem Umbau im Jahr 2013 ist geplant 2014 die Design-Schwerpunktsenergie zu erreichen.

Die Abbildungen 3.14 - 3.17 zeigen die Tree-Level-Feynman-Diagramme für die $\tilde{g}\tilde{g}$ - $\tilde{q}\tilde{q}$ - $\tilde{q}\tilde{\bar{q}}$ - und $\tilde{q}\tilde{\bar{q}}$ -Produktion, die an den meisten Parameterpunkten den größten Anteil am hier betrachteten Kanal ausmachen. Nach ihrer Produktion zerfallen die supersymmetrischen Teilchen in der Regel in langen Ketten. Ein typisches Beispiel ist in Abbildung 3.13 gegeben. In der ersten Phase der Datennahme liegt der Schwerpunkt auf sogenannten inklusiven Suchen, d.h. es wird versucht, möglichst viele supersymmetrische Ereignisse zu finden, ohne danach zu fragen, ob sie aus einer bestimmten Zerfallskette stammen. Im Falle einer Entdeckung würde dann versucht, in exklusiven Suchen bestimmte SUSY-Ereignisse herauszufiltern, um beispielsweise Massenkanten vermessen zu können.

Die inklusiven Suchen sind in der Regel sogenannte Zählexperimente, in denen gemessene Ereignisraten in bestimmten Kanälen mit vom Standardmodell vorhergesagten Ereignisraten verglichen werden. In dieser Arbeit wird die Suche im Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal betrachtet, wie sie vom ATLAS-Experiment in [5] vorgeschlagen wurde. Wie Abbildung 3.12 zeigt, ist dies der sensitivste Kanal. Außerdem ist davon auszugehen, dass seine theoretische Vorhersage die geringste Abhängigkeit von $\tan\beta$ und A_0 hat (siehe Abschnitt 3.4).

Typische Merkmale einer SUSY-Zerfallskette sind viele harte Jets durch die entstandenen Quarks sowie fehlende Transversalenergie durch das χ_1^0 . Die Suche im Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal wird im Einzelnen durch folgende Schnitte definiert:

- Das Ereignis darf kein Elektron oder Muon mit einem Transversalimpuls $p_T > 20 \text{ GeV}$ enthalten.
- Das Ereignis muss mindestens vier Jets mit einer Pseudorapidität $|\eta| < 2.5$ enthalten, von denen einer einen Transversalimpuls $p_T > 100 \text{ GeV}$, die anderen einen Transversalimpuls $p_T > 40 \text{ GeV}$ haben müssen.
- Die fehlende Transversalenergie muss größer als 80 GeV sein.
- Das Verhältnis zwischen der fehlenden Transversalenergie und der effektiven Masse M_{eff} muss größer als 0.2 sein. Letztere ist definiert als die Summe der fehlenden Transversalenergie und den Transversalimpulsen der vier führenden Jets.
- Der Azimutalwinkel zwischen der fehlenden Transversalenergie und den drei führenden Jets muss mehr als 0.2 betragen.
- Die Spherizität muss größer als 0.2 sein.

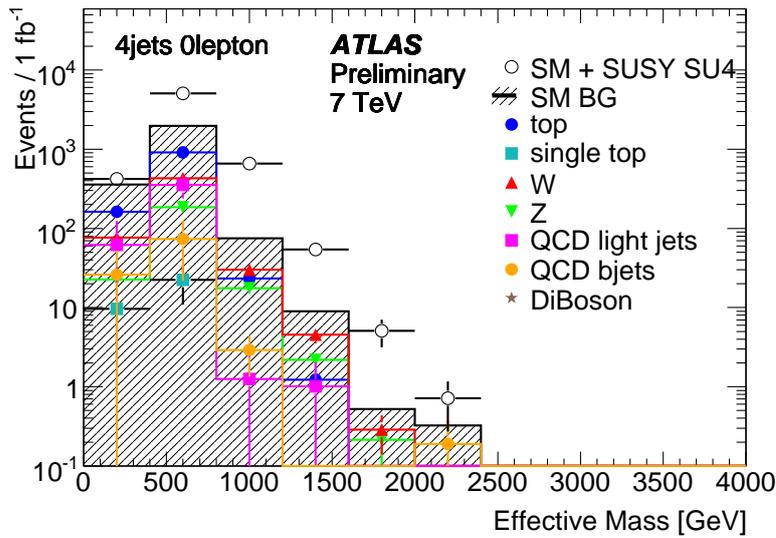


Abbildung 3.11: Verteilung der effektiven Masse im Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal für verschiedene Standardmodell- sowie supersymmetrische Prozesse am Parameterpunkt SU4 nach einer ATLAS - Simulation (aus [5]).

Entsprechend ihrer effektiven Masse werden diese Ereignisse in 10 unterschiedliche Bins zwischen 0 und 4000 GeV eingeteilt. Abbildung 3.11 zeigt diese theoretische M_{eff} -Verteilung für den Standardmodelluntergrund und das SUSY-Signal am SU4 Parameterpunkt ($M_0 = 200 \text{ GeV}$, $M_{1/2} = 160 \text{ GeV}$, $A_0 = -400 \text{ GeV}$, $\tan \beta = 10$).

3.4 Computer-Codes

Für die theoretische Vorhersage der Niedrig-Energie-Messungen und der Dunklen Materie existieren verschiedene Computerprogramme, auf die in dieser Arbeit mittels des Frameworks MasterCode [62] zugegriffen wird. Im Einzelnen sind das:

- MicrOMEGAs ([63], [64]) für die Dunkle Materie
- SuperIso [65] für K- und B-Physik
- FeynHiggs [66] für die Higgsmasse und a_μ
- SUSY-POPE für die Z-Observablen und die W-Masse.

Als Eingabe wird das supersymmetrische Teilchenspektrum benötigt, wie es von Kalkulatoren wie SPheno [67] berechnet wird. Die benötigte Rechenzeit je Parameterpunkt liegt in der Größenordnung von einer Sekunde.

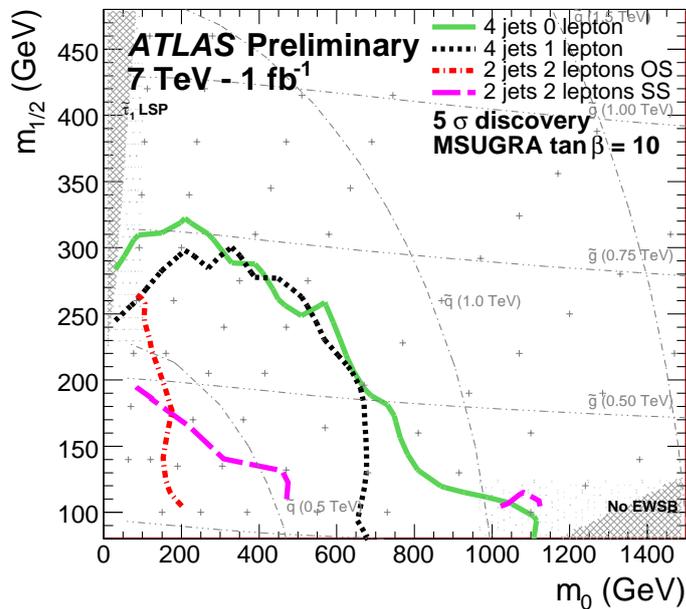


Abbildung 3.12: 5σ - Entdeckungspotential in der $M_0 - M_{1/2}$ - Ebene für $\tan \beta = 10$ und $A_0 = 0$ für verschiedene Kanäle mit $1fb^{-1}$ integrierter Luminosität nach einer ATLAS-Simulaion (aus [5]).

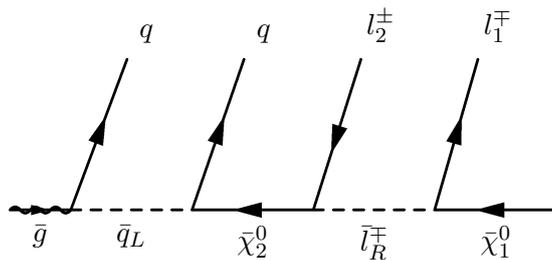
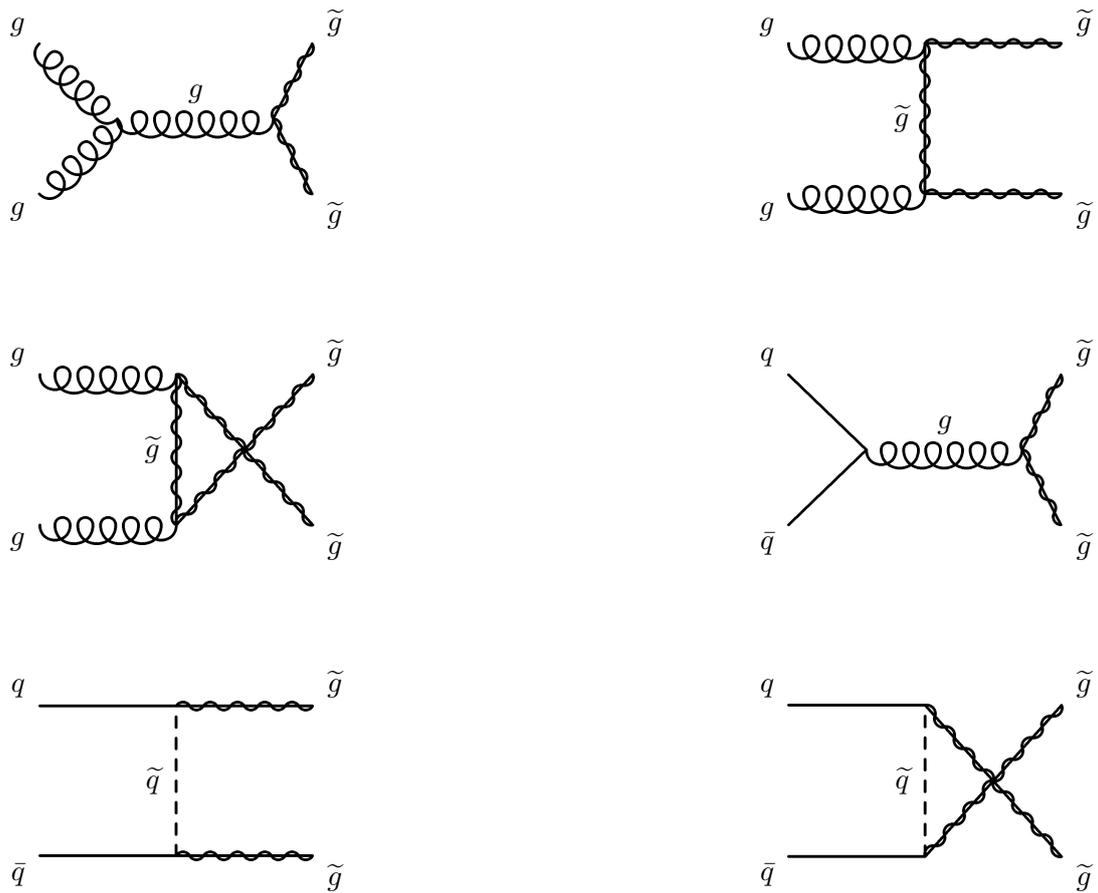
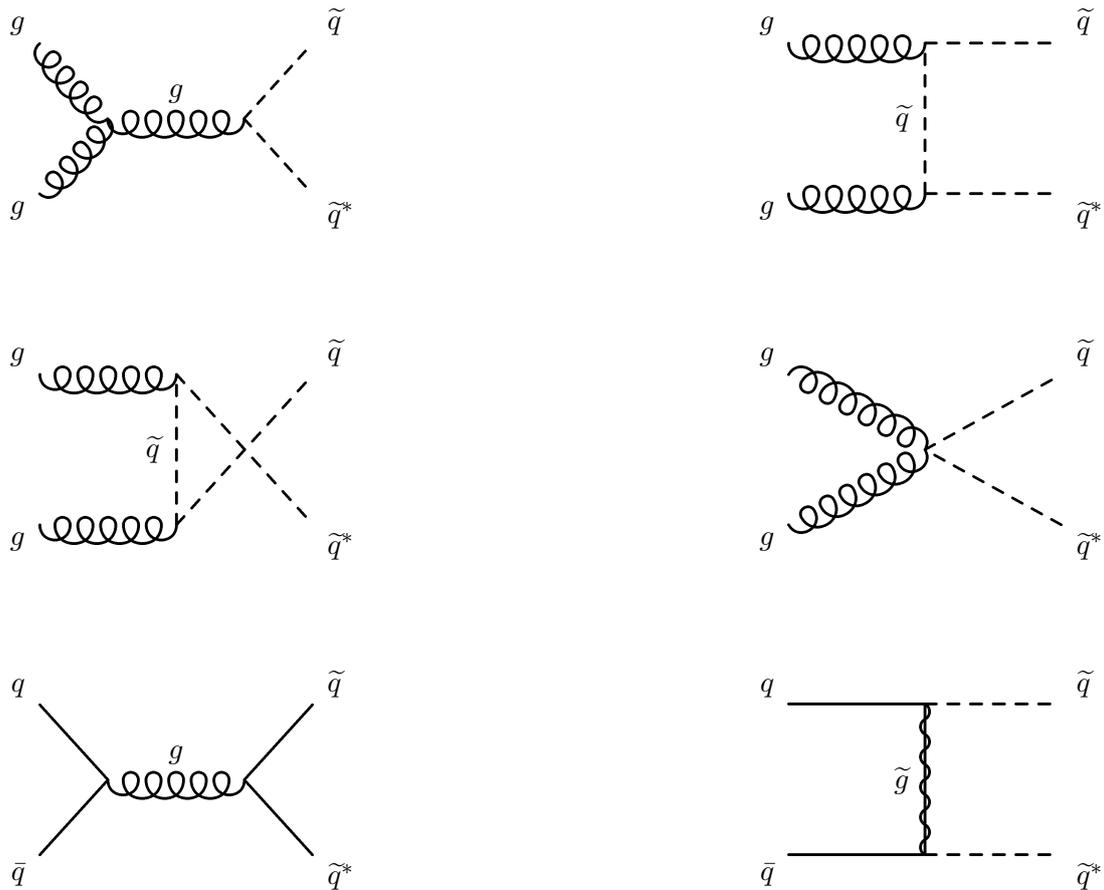


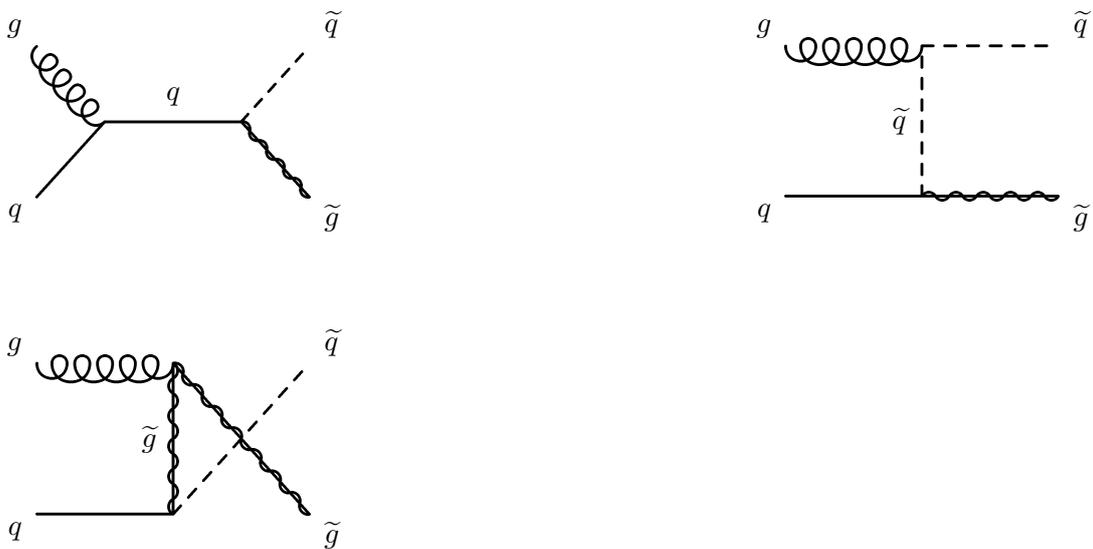
Abbildung 3.13: Zerfallskette eines \tilde{g} . Charakteristische Signaturen im Detektor sind harte Jets von den q sowie fehlende Transversalenergie durch das $\tilde{\chi}_1^0$.

Abbildung 3.14: Tree - Level SUSY-QCD Diagramme der $\tilde{g}\tilde{g}$ - Produktion

Abbildung 3.15: Tree - Level SUSY-QCD Feynman-Diagramme der $\tilde{q}\tilde{q}^*$ - Produktion

Die Ereignisraten am LHC hingegen müssen durch Ereignissimulationen abgeschätzt werden. In dieser Arbeit wurden dafür an 500 verschiedenen Parameterpunkten jeweils 50000 Ereignisse mit dem Monte-Carlo-Programm Herwig++ [68] generiert. Detektoreffekte wurden mit der schnellen Simulation DELPHES [69] berücksichtigt. Dabei wurden die Einstellungen verwendet, die den ATLAS-Detektor simulieren. Es wurde validiert, dass die DELPHES-Simulation Ergebnisse der ATLAS-Kollaboration hinreichend reproduziert. Abbildung 3.19 vergleicht das mit der DELPHES-Simulation im Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal erhaltene Entdeckungspotential mit dem der ATLAS-Kollaboration. Es ist zu beachten, dass ATLAS hierfür LO-Wirkungsquerschnitte verwendete. Für die Fits in dieser Arbeit wurden die Produktionskanäle $\tilde{g}\tilde{g}$, $\tilde{g}\tilde{q}$, $\tilde{q}\tilde{q}$ und $\tilde{q}\tilde{q}^*$ hingegen entsprechend ihrer NLO-Wirkungsquerschnitte, wie vom Program Prospino [70] berechnet, gewichtet.

Die gewählten Parameterpunkte lagen in M_0 zwischen 20GeV und 1600GeV und in $M_{1/2}$ zwischen 100GeV und 1200GeV. Zwischen den Punkten dieses Grids wurde interpoliert. $\tan\beta$ wurde auf 10, A_0 auf 0 gesetzt, da angenommen wurde, dass die Abhängigkeit von

Abbildung 3.16: Tree - Level SUSY-QCD Feynman-Diagramme der $\tilde{q}\tilde{q}$ - ProduktionAbbildung 3.17: Tree - Level SUSY-QCD Feynman-Diagramme der $\tilde{g}\tilde{q}$ - Produktion

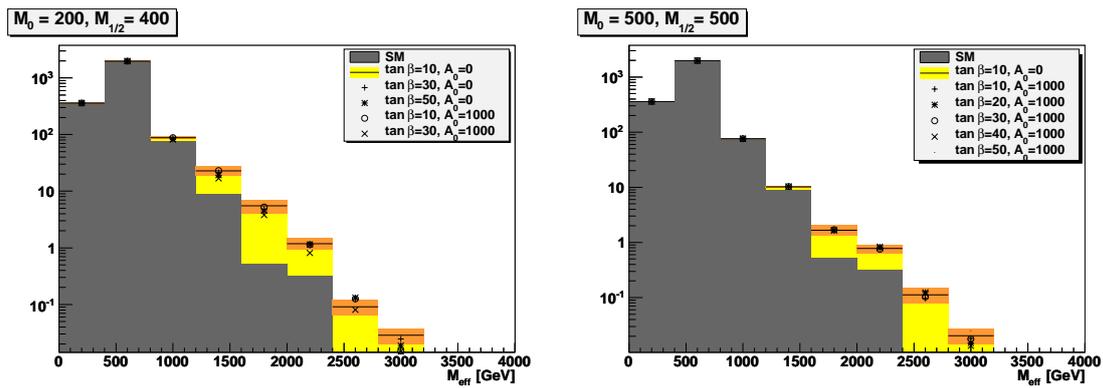


Abbildung 3.18: Verteilung der effektiven Masse im Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal, wie sie sich aus einer DELPHES-Simulation ergibt für verschiedene Werte von $\tan\beta$ und A_0 . In grau ist der Standardmodell - Untergrund eingezeichnet, in gelb das SUSY-Signal, in orange der angenommene Fehler von 30% auf das Signal.

diesen Parametern innerhalb des theoretischen Fehlers liegt. Abbildung 3.18 zeigt für zwei Beispielpunkte, dass dieses gut erfüllt ist.

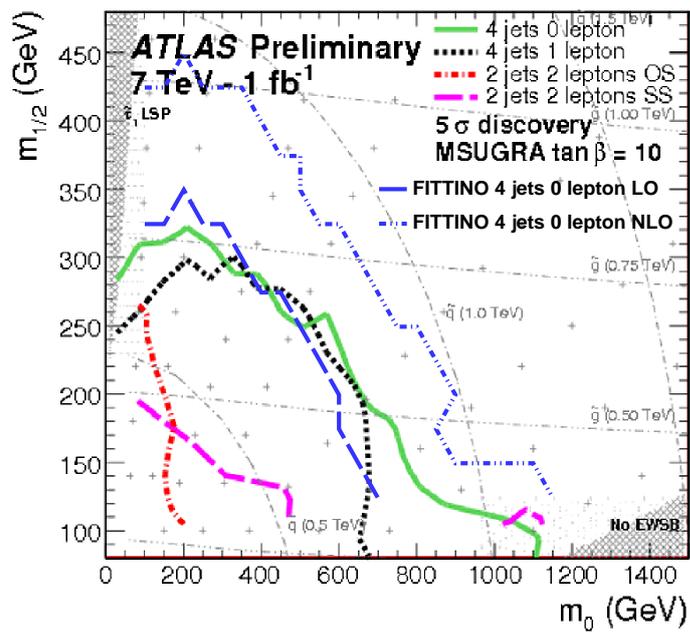


Abbildung 3.19: Vergleich des Entdeckungspotentials bei 7 TeV Schwerpunktsenergie und 1 fb^{-1} Luminosität wie es sich in einer ATLAS-Simulation und einer DELPHES-Simulation ergibt

4 Die statistische Methode

Ist ein Modell gewählt und auf dieses sensitive Observablen gemessen, so stellt sich die Frage, wie die Messergebnisse in diesem Modell zu interpretieren sind. Diese ist statistischer Natur, da der Messprozess ein Zufallsprozess ist. Das liegt zum einen daran, dass (soweit bekannt) der betrachtete physikalische Prozess selbst ein Zufallsprozess gemäß den Regeln der Quantenmechanik ist. Zum anderen liegt es daran, dass die endliche Genauigkeit der Messung zu einer Streuung der Ergebnisse führt. Es sind also stets nur Aussagen möglich, die „mit einer gewissen Signifikanz“ gelten.

Mögliche Fragen sind:

1. Mit welchen Parameterwerten beschreibt das Modell die Gesamtheit der Messungen am besten?
2. Angenommen, das Modell ist richtig. Welcher Bereich enthält die wahren Parameter mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit?
3. Schließt eine der Messungen das gewählte Modell im Vergleich zu einem alternativen Modell mit einer gewissen Signifikanz aus? Hierbei ist in der Teilchenphysik die (willkürliche) Konvention üblich, das Modell bei einer Signifikanz von 95% als widerlegt anzusehen, falls das alternative Modell das Standardmodell ist.
4. Schließt eine Messung ein alternatives Modell im Vergleich zum gewählten Modell mit einer gewissen Signifikanz aus? Hier ist es üblich, eine Signifikanz von 99.9999427% („ 5σ “) gegenüber dem Standardmodell zu verlangen, um von einer Entdeckung des gewählten Modells zu sprechen.
5. Wie gut beschreibt das Modell die Gesamtheit der Messungen?

Fragen der Art 1) - 2) entstammen der Schätztheorie und werden in dem Abschnitt 4.2 besprochen. Fragen der Art 3) - 4) werden im mathematischen Gebiet der Testtheorie behandelt und in Abschnitt 4.3 diskutiert. Die Frage 5) wird in Abschnitt 4.4 behandelt.

In Abschnitt 4.1 werden zunächst einige zentrale Begriffe der Statistik rekapituliert. Für mehr Details und Herleitungen siehe die verwendeten Quellen [71], [72], [73] und [74].

4.1 Grundlegende Begriffe

Im Folgenden werden Ereignis- oder Stichprobenräume $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $\Omega \subset \mathbb{N}^N$ betrachtet. Um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf ihnen zu definieren, ist es notwendig, sie mit einer σ -Algebra \mathcal{B}_Ω zu versehen [71]. Für Ereignisräume $\Omega \subset \mathbb{N}^N$ wird die Potenzmenge von Ω , d.h. die Menge aller Teilmengen, gewählt. Für Ereignisräume $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Deshalb wird die kanonische borelsche σ -Algebra verwendet [71]. Im Folgenden werden in diesem Kontext einige zentrale Begriffe definiert. Die dabei auftretenden Integrale der Form

$$\int_{\vec{x} \in A} d\vec{x}$$

sind im Falle $\Omega \subset \mathbb{N}^N$ durch Summen der Form

$$\sum_{\vec{x} \in A}$$

zu ersetzen.

- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω ist eine Funktion $P : \mathcal{B}_\Omega \rightarrow [0, 1]$, welche die Kolmogorovschen Axiome [75] erfüllt. Sie macht (Ω, P) zu einem Wahrscheinlichkeitsraum.
- Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ auf (Ω, P) , die für alle $A \in \mathcal{B}_\Omega$

$$P(A) = \int_{\vec{x} \in A} d\vec{x} f(\vec{x})$$

erfüllt, heißt Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (p.d.f.) zum Wahrscheinlichkeitsmaß P .

- Die N-dimensionale Gaußverteilung auf $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ zum Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^N$ und zur Kovarianzmatrix $V \in \text{Mat}(N \times N)$ ist definiert durch die Dichtefunktion

$$f_{\text{Gauß}}(\vec{x}, \vec{\mu}, V) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |V|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) \right].$$

- Die χ^2 -Funktion zu k Freiheitsgraden auf $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch die Dichtefunktion

$$f_{\chi^2}(x, k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Eine Statistik oder Zufallsvariable t auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) ist eine Funktion auf dem Stichprobenraum $t : \Omega \rightarrow S$ in eine beliebige Menge S .
- Der Erwartungswert einer reellwertigen Zufallsvariablen $t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einer Dichtefunktion $f(\vec{x})$ ist gegeben durch

$$E(t) = \int_{\vec{x} \in \Omega} d\vec{x} t(\vec{x}) f(\vec{x}).$$

- Die Kovarianz zweier reellwertiger Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- Eine Zufallsvariable $t : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) heißt χ_k^2 -verteilt, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(\vec{x} \in \Omega | t(\vec{x}) < a) = \int_0^a dx f_{\chi^2}(x, k).$$

- Ein statistisches Modell auf Ω besteht aus einer Klasse $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω .
- Die Likelihood-Funktion eines statistischen Modells $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ mit zugehörigen Dichtefunktionen $f_\theta(\vec{x})$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} \Omega \times \Theta &\rightarrow [0, 1] \\ (\vec{x}, \theta) &\mapsto f(\vec{x}, \vec{\theta}) = f_{\vec{\theta}}(\vec{x}). \end{aligned}$$

- Das α -Quantil z_α einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$z_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(y \in \Omega | y \leq x) \geq \alpha\}.$$

Den Zusammenhang zwischen der mathematischen Definition und der physikalischen Beobachtung stellt die Interpretation des Wahrscheinlichkeitsmaßes her. In der frequentisti-

schen Interpretation wird die Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit im Grenzfall unendlich oft wiederholter Messungen interpretiert, d.h. es gilt für jedes Ereignis $A \in \mathcal{B}_\Omega$

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Häufigkeit des Ergebnisses } A \text{ in } n \text{ Messungen}}{n}.$$

4.2 Parameterschätzungen

In diesem Abschnitt wird besprochen, mit welchen statistischen Verfahren sich aus den Beobachtungen auf die Parameter eines physikalischen Modells schließen lässt. Abschnitt 4.2.1 behandelt dabei sogenannte Punktschätzungen, Abschnitt 4.2.2 Bereichsschätzungen.

4.2.1 Punktschätzungen

Ein physikalisches Modell mit freien Parametern $\vec{\theta}$ kann leicht als statistisches Modell im obigen Sinne interpretiert werden: Für jeden angenommenen Wert von $\vec{\theta}$ treten die möglichen Messergebnisse des Stichprobenraums mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf. Jeder Wert von $\vec{\theta}$ definiert also ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\vec{\theta}}$, und insgesamt bildet das physikalische Modell ein statistisches Modell $(P_{\vec{\theta}}, \theta \in \Theta)$, mit zugehöriger Likelihood-Funktion $f(\vec{x}, \vec{\theta})$.

Zur Abschätzung des wahren Werts von $\vec{\theta}$ ist eine Statistik $T : \Omega \rightarrow \Theta$, in diesem Zusammenhang Schätzer genannt, notwendig, welche je nach Beobachtung auf einen geeigneten Wert von $\vec{\theta}$ schließt. Dieser Wert wird dann als Best-Fit-Punkt bezeichnet. Den Prozess ihn zu finden, bezeichnet man als die Durchführung eines Fits.

Ein häufig verwendeter Schätzer ist der Maximum-Likelihood-Schätzer. Dabei wird einer Beobachtung \vec{x} der Parameter $T(\vec{x})$ zugeordnet, der die Likelihood-Funktion maximiert, d.h. für den gilt

$$f(\vec{x}, T(\vec{x})) = \max_{\vec{\theta} \in \Theta} f(\vec{x}, \vec{\theta}).$$

Ein ebenfalls oft verwendeter Schätzer ist der Kleinste-Quadrate-Schätzer. Dabei wird einer Beobachtung \vec{x} der Parameter $T(\vec{x})$ zugeordnet, der die Q^2 -Funktion minimiert, d.h. für den gilt

$$Q^2(\vec{x}, T(\vec{x})) = \min_{\vec{\theta} \in \Theta} Q^2(\vec{x}, \vec{\theta}).$$

Dabei ist die Q^2 -Funktion gegeben durch

$$Q^2(\vec{x}, \vec{\theta}) = (\vec{x} - \vec{y}(\vec{\theta}))^T V(\theta)^{-1} (\vec{x} - \vec{y}(\vec{\theta})).$$

Der Vektor \vec{y} ist zusammengesetzt aus den Erwartungswerten $y_i = E(t_i)$, wobei t_i die Projektion

$$\begin{aligned} t_i : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\rightarrow x_i \end{aligned}$$

ist. V ist die Kovarianzmatrix gegeben durch $V_{ij} = \text{Cov}(t_i, t_j)$.

In der Regel wird dabei angenommen, dass die Kovarianzmatrix $V(\vec{\theta}) = V$ bekannt ist und nicht von den Parametern abhängt. Ist die Likelihood-Funktion durch eine N -dimensionale Gaußverteilung gegeben,

$$f(\vec{x}, \vec{\theta}) = f_{\text{Gauß}}(\vec{x}, \vec{\mu}(\vec{\theta}), V),$$

so ist $-2 \ln f(\vec{x}, \vec{\theta}) \sim Q^2(\vec{x}, \vec{\theta})$, und wegen der Monotonie der Logarithmusfunktion stimmen der Maximum-Likelihood- und der Kleinste-Quadrate-Schätzer überein. Ist zudem $\vec{\theta}^*$ der wahre Wert von $\vec{\theta}$, so ist die Zufallsvariable $Q^2(\vec{x}, \vec{\theta}^*)$ χ_N^2 -verteilt. Deshalb wird diese Methode häufig - auch im nicht gauß'schen Fall - χ^2 -Methode genannt und $Q^2(\vec{x}, \vec{\theta})$ die χ^2 -Funktion.

4.2.2 Bereichsschätzungen

Eine bloße Punktschätzung ist im Allgemeinen wertlos, solange nicht der „Fehler“ dieser Schätzung bekannt ist. Das wird formalisiert im Begriff des Konfidenzbereichs. Sei dafür weiterhin $(P_{\vec{\theta}}, \vec{\theta} \in \Theta)$ ein statistisches Modell mit Likelihood-Funktion $f(\vec{x}, \vec{\theta})$. Eine Statistik

$$\begin{aligned} C : \Omega &\rightarrow \mathcal{P}(\Theta) \\ \vec{x} &\mapsto C(\vec{x}) \end{aligned}$$

vom Stichprobenraum Ω in die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Theta)$ heißt ein Bereichsschätzer zum Sicherheitsniveau (confidence level, CL) $1 - \alpha$, wenn

$$\inf_{\vec{\theta} \in \Theta} P_{\vec{\theta}}(x \in \Omega : C(x) \ni \vec{\theta}) \geq 1 - \alpha.$$

Die Menge $C(\vec{x}) \subset \Theta$ heißt Konfidenzbereich zum Messwert \vec{x} . Die Konfidenzbereiche sind also so konstruiert, dass sie im Grenzfall unendlicher Wiederholung der Messung in mindestens $100(1 - \alpha)\%$ der Fälle den wahren Parameterwert enthalten. Offensichtlich ist die gesamte Indexmenge Θ ein solcher Konfidenzbereich, der allerdings keinerlei Information enthält. Die Aufgabe besteht hingegen darin, möglichst kleine Konfidenzbereiche zu konstruieren. Dabei hilft das Neyman-Verfahren: Zu jedem $\vec{\theta} \in \Theta$ wird zunächst ein möglichst

kleines $C_{\vec{\theta}} \subset \Omega$ mit $P_{\vec{\theta}}(C_{\vec{\theta}}) \geq 1 - \alpha$ bestimmt und dann

$$C(\vec{x}) = \{\vec{\theta} \in \Theta : C_{\vec{\theta}} \ni \vec{x}\}$$

gesetzt. Ist $\vec{\theta}^*$ der wahre Wert von θ , so ist der gemessene Wert \vec{x} mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ in $C_{\vec{\theta}^*}$ enthalten. Ist er das, gilt aber auch $\vec{\theta} \in C(\vec{x})$.

Ein Konfidenzbereich, auch ein möglichst kleiner, zu einem gewissen Sicherheitsniveau ist offensichtlich nicht eindeutig bestimmt. Interessiert man sich insbesondere nur für $v < p$ von p Parametern, bieten sich sogenannte v -dimensionale Konfidenzbereiche an, die an die restlichen $N - v$ Parameter keinerlei Bedingung stellen, sondern nur die v Parameter so weit wie möglich einschränken.

Die Konstruktion solcher Konfidenzbereiche kann mit Hilfe der $Q^2(\vec{x}, \vec{\theta})$ -Funktion erfolgen. Sei

$$Q_{\min}^2(\vec{x}) = \min_{\vec{\theta} \in \Theta} Q^2(\vec{x}, \vec{\theta})$$

sowie

$$Q_v^2(\vec{x}, \vec{\theta}) = \min_{\tilde{\theta}_{v+1} \dots \tilde{\theta}_p} Q^2(\vec{x}, \theta_1, \dots, \theta_v, \tilde{\theta}_{v+1}, \dots, \tilde{\theta}_p)$$

und $\vec{\theta}^*$ der wahre Parameterwert. Dann gilt für gaußverteilte Messungen, bei denen der Mittelwert linear von den Parametern abhängt, dass

$$Q_v^2(\vec{x}, \theta^*) - Q_{\min}^2(\vec{x})$$

χ_v^2 - verteilt ist.

Damit lassen sich nach dem Neyman-Verfahren wie folgt v -dimensionale Konfidenzintervalle zum Sicherheitsniveau $1 - \alpha$ konstruieren: Man setzt

$$C_{\vec{\theta}} = \{\vec{x} \in \Omega \mid Q_v^2(\vec{x}, \theta) - Q_{\min}^2(\vec{x}) < z_{1-\alpha}\},$$

wobei $z_{1-\alpha}$ das Quantil bezüglich der χ_v^2 -Verteilung ist. Dann ist

$$C(\vec{x}) = \{\vec{\theta} \in \Theta : C_{\vec{\theta}} \ni \vec{x}\} = \{\theta \in \Theta : Q_v^2(\vec{x}, \vec{\theta}^*) - Q_{\min}^2(\vec{x}) < z_{1-\alpha}\}.$$

4.3 Hypothesentests

Ein Hypothesentest kann als statistisches Modell (P_0, P_1) mit zweielementiger Indexmenge aufgefasst werden: Nach der Nullhypothese H_0 beschreibt das Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 die Daten, nach der Alternativhypothese das Maß P_1 . Wie im Fall der Parameterschätzung

wird aufgrund einer Statistik $\Omega \rightarrow S$ - in diesem Fall Teststatistik genannt - die Entscheidung für eine der Hypothesen gefällt. Dafür ist eine kritische Region $K \subset S$ zu definieren, so dass die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn das Testergebnis in K liegt. Das Komplement $S \setminus K$ definiert dann die Akzeptanzregion, in der die Nullhypothese beibehalten wird. Ein Hypothesentest besteht also aus der Wahl einer Statistik und einer kritischen Region.

Der Test hat das Sicherheitsniveau (CL) $1 - \alpha$, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art α ist. Bei einem Fehler erster Art wird die Nullhypothese verworfen, obwohl sie wahr ist. Der Test hat die Güte $1 - \beta$, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art β ist. Bei einem Fehler zweiter Art wird fälschlich die Nullhypothese akzeptiert, obwohl die Alternative vorliegt.

Nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip sollte man die Alternative der Nullhypothese vorziehen, wenn die Beobachtung \vec{x} zu einem hinreichend großen Wert $f(\vec{x}, 1)$ der Likelihood-Funktion für H_1 gegenüber dem Wert $f(x, 0)$ für die Nullhypothese führt. Dies wird gemessen durch das Verhältnis $R = \frac{f(\vec{x}, 0)}{f(\vec{x}, 1)}$. Nach dem Neyman-Pearson-Lemma ist für ein gegebenes Sicherheitsniveau $1 - \alpha$ der Test mit der größten Güte gerade durch diese Teststatistik R und die kritische Region

$$K = \{r \in \mathbb{R} | r < c\}$$

gegeben, wobei c die Konstante ist, die $P_0(x \in \Omega | R(x) \leq c) = \alpha$ erfüllt.

Betrachtet man allgemein reellwertige Teststatistiken R und kritische Regionen von der Form wie K , so lässt sich der P-Wert des Tests definieren als die minimale Irrtumswahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese bei gegebener Beobachtung $\vec{x} \in \Omega$ durch geeignete Wahl der Grenze c verworfen werden kann. Er ist gegeben durch

$$p = P_0(\vec{y} \in \Omega | R(\vec{y}) \leq R(\vec{x})).$$

4.4 Güte des Fits

In diesem Abschnitt soll noch einmal auf die Parameterschätzung zurückgekommen werden. Die Frage, wie gut der Best-Fit-Punkt die Gesamtheit der Daten beschreibt, kann in Form eines Hypothesentests beantwortet werden, bei dem H_0 die Hypothese ist, dass das Modell mit den gefundenen Parametern wahr ist. Der P-Wert dieser Hypothese, definiert in Abschnitt 4.3, heißt dann P-Wert des Fits. Je größer der P-Wert, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen.

Ein anderer Wert, der die Güte des Fits misst, ist das Verhältnis $Q_{\min}^2(\vec{x})/\text{ndf}$. Dabei ist die Zahl der Freiheitsgrade ndf gegeben als die Zahl der Beobachtungen minus die Zahl der Parameter. Die Ursache liegt darin, dass die Q_{\min}^2 -Statistik unter recht allgemeinen Annahmen χ_{ndf}^2 -verteilt ist, und der Erwartungswert der χ_{ndf}^2 -Funktion gerade ndf ist. Im Mittel wird man daher ein Verhältnis von 1 erwarten. Ein deutlich größeres Verhältnis deutet somit darauf hin, dass das Modell die Daten nicht richtig beschreiben kann, ein deutlich kleinerer Wert könnte an einer Überschätzung der Fehler liegen.

4.5 Das Framework Fittino

Das Programm Fittino [76] bietet die Möglichkeit, die in diesem Kapitel besprochenen statistischen Methoden auf supersymmetrische Modelle anzuwenden. Es ist in C++ geschrieben und benutzt Funktionen der ROOT-Bibliothek [77].

Zur Abschätzung der Parameter des supersymmetrischen Modells (in dieser Arbeit stets mSUGRA) benutzt Fittino dabei die Funktion

$$Q^2(\vec{x}, \vec{\theta}) = (\vec{x} - \vec{y})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{y})$$

aus Abschnitt 4.2.1. Für x werden die Messwerte aus Tabelle 3.1 eingesetzt, für die Kovarianzmatrix V wird für die Messungen am Z-Pol die Kovarianzmatrix aus [78] benutzt, für \vec{y} die vom Modell vorhergesagten Observablenwerte. Diese werden den Programmcodes aus Abschnitt 3.4 entnommen, mit denen mittels des Les Houches-Formats ([79],[80]) kommuniziert wird.

Ist für eine Observable experimentell nur eine obere Grenze oder eine untere Grenze x bekannt, so wird zur $Q^2(\vec{x}, \vec{\theta})$ Funktion der Betrag

$$(x - y(\vec{\theta}))^2 / \sigma^2$$

addiert, wenn der theoretische Wert der Observablen $y(\vec{\theta})$ diese Grenze über- bzw. unterschreitet. Dabei ist σ der Fehler dieses Theoriewertes.

Ist schließlich ein Parameterpunkt mit $100\alpha\%$ Sicherheitsniveau vom LHC ausgeschlossen, so wird das Quadrat des α -Quantils der Normalverteilung zur Q^2 -Funktion addiert.

Die verwendete Q^2 -Funktion lässt sich insgesamt also schematisch als

$$Q^2(\vec{x}, \vec{\theta}) = (\vec{x} - \vec{y})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{y}) + \text{limits} + \text{LHC}_{\chi^2}$$

schreiben.

Das Sicherheitsniveau α wird dabei im Rahmen eines Hypothesentests nach dem Neyman-Pearson-Lemma gegenüber dem Standardmodell bestimmt. Als Stichprobenraum $\Omega \subset \mathbb{N}^{N_{\text{bins}}}$ wird dabei die Zahl der beobachteten Ereignisse in den N_{bins} effektiven Massenbins benutzt. Die Nullhypothese ist, dass ihre Verteilung durch

$$f(\vec{x}, \text{SUSY}) = \prod_{i=1}^{N_{\text{bins}}} P(s_i + b_i, x_i)$$

beschrieben wird, die Alternativhypothese, dass

$$f(\vec{x}, \text{SM}) = \prod_{i=1}^{N_{\text{bins}}} P(b_i, x_i)$$

die richtige Verteilung ist. Dabei ist b_i die Anzahl der im Standardmodell erwarteten Ereignisse, s_i die Anzahl der erwarteten supersymmetrischen Ereignisse gemäß des in Abschnitt 3.4 beschriebenen Grids und

$$P(n, x) = \frac{n^x}{n!} e^{-n}$$

die Poisson-Verteilung. Als Teststatistik wird gemäß dem Neyman-Pearson-Lemma das Verhältnis

$$R(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}, \text{SUSY})}{f(\vec{x}, \text{SM})}$$

benutzt. Das Sicherheitsniveau des Ausschlusses, $CL = 1 - p$, wobei p der P-Wert des Tests ist, wird dann durch ein Toy-Experiment bestimmt. Dabei wird die Zahl der erwarteten Ereignisse s_i bzw. b_i gaußförmig innerhalb der angenommenen systematischen Unsicherheiten von 30% bzw. 20% verschmiert.

In Fittino lassen sich nun mit der so definierten Q^2 -Funktion Punktschätzungen der Parameter nach dem χ^2 -Verfahren und Bereichsschätzungen in der linearen Näherung durchführen, sowie P-Werte bestimmen. Fittino bietet auch die Möglichkeit, mit Toy-Experimenten exakte Konfidenzbereiche zu bestimmen. Aufgrund der dafür nötigen sehr großen Rechenzeit wurde davon in dieser Arbeit kein Gebrauch gemacht. Für die Durchführung der Punktschätzung, d.h. das Bestimmen des Minimums der Q^2 -Funktion, stehen verschiedene, schnelle Algorithmen wie Simulated Annealing oder Genetic Algorithms zur Verfügung. Auch davon wurde in dieser Arbeit jedoch kein Gebrauch gemacht. Stattdessen wurden ausschließlich Markovketten benutzt, da diese einen großen Parameterbereich um das Minimum erfassen, was für die Bestimmung der Konfidenzbereiche sowieso erforderlich ist.

5 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der verschiedenen Fits vorgestellt. Die Best-Fit-Punkte, \mathcal{P} -Werte, Pull-Verteilungen, ein- und zweidimensionale Konfidenzbereiche sowie die resultierenden Massenspektren werden diskutiert.

5.1 Fit mit Niedrig-Energie-Messungen

Zunächst wird zum Vergleich mit [6] ein Fit durchgeführt, der nur die Niedrig-Energie-Observablen und die Relikt-Dichte Dunkler Materie (im Folgenden zusammenfassend als Niedrig-Energie-Observablen bezeichnet) verwendet.

5.1.1 Best-Fit-Punkt, \mathcal{P} -Wert und Pull-Verteilung

Tabelle 5.1 zeigt den Best-Fit-Punkt einschließlich 1σ - Umgebungen sowie das minimale χ^2 und den \mathcal{P} - Wert für den Fit mit allen Niedrig-Energie-Observablen im Vergleich zum Ergebnis aus Referenz [6]. In dieser wurden zusätzlich zu den supersymmetrischen Parametern auch einige Standardmodell-Parameter variiert, die in dieser Arbeit auf den gemessenen Wert gesetzt wurden. Außerdem wurde dort statt des Programms HiggsBounds ein rigides Higgsmassen-Limit benutzt. Die Ergebnisse in Tabelle 5.1 stimmen sehr gut überein und zeigen, dass diese Unterschiede einen zu vernachlässigenden Effekt haben.

Das Verhältnis $\chi^2/\text{ndf} = 18.9/20$ sowie der entsprechende \mathcal{P} -Wert von 53% belegen, dass das mSUGRA-Modell die ausgewählten Beobachtungen insgesamt sehr gut beschreiben

	M_0 [GeV]	$M_{1/2}$ [GeV]	A_0 [GeV]	$\tan\beta$	χ^2	ndf	\mathcal{P} -Wert [%]
	77^{+114}_{-31}	333^{+89}_{-87}	426^{+704}_{-735}	13^{+10}_{-8}	18.9	20	53
[6]	76^{+80}_{-30}	332 ± 87	384 ± 647	13 ± 8	20.6	22	54

Tabelle 5.1: Best-Fit-Punkt, χ^2/ndf und \mathcal{P} -Wert des Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen im Vergleich zum Ergebnis aus Referenz [6]

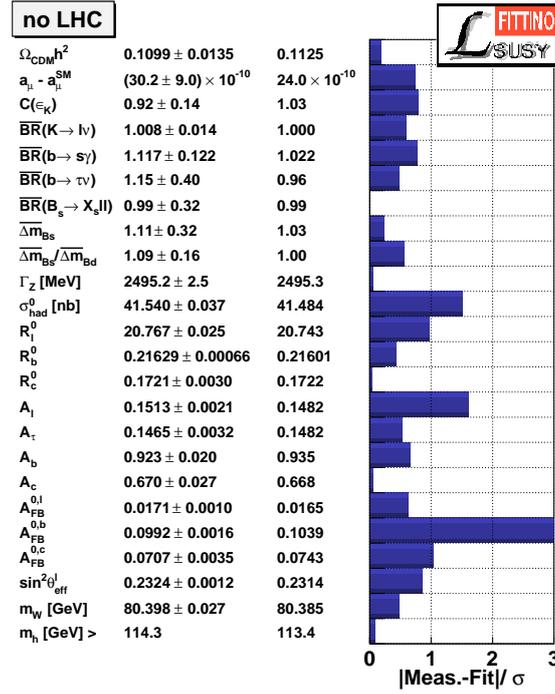


Abbildung 5.1: Pull-Verteilung der Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 am Best-Fit-Punkt aus Tabelle 5.1. Grenzen, die an diesem Punkt keinen χ^2 -Beitrag liefern, sind nicht eingezeichnet.

kann. In Abbildung 5.1 ist der Betrag der Abweichungen der theoretischen Vorhersage der Observablen am Best-Fit-Punkt vom entsprechenden Messwert in Einheiten der Standardabweichung aufgetragen (Pull-Verteilung). Am Best-Fit-Punkt liegen alle Observablen außer $A_{\text{FB}}^{0,b}$ innerhalb der 2σ -Umgebung ihrer Messwerte. $A_{\text{FB}}^{0,b}$ weicht um 3σ ab.

5.1.2 Zweidimensionale Konfidenzbereiche

Abbildung 5.2 zeigt zweidimensionale Konfidenzbereiche der Parameter. In Abbildung 5.2a wird deutlich, dass die Niedrig-Energie-Observablen eine 'leichte Supersymmetrie' bevorzugen, mit Werten von sowohl M_0 als auch $M_{1/2}$ unter 1000 GeV. Abbildung 5.2b zeigt, dass zwar für freie Parameter M_0 , $M_{1/2}$ und A_0 im durch $\Delta\chi^2 < 6$ definierten Bereich $\tan\beta$ fast alle Werte aus dem theoretisch zugänglichen Intervall $[0, 60]$ annimmt, dass $\tan\beta$ dabei jedoch stark mit M_0 korreliert ist (vgl. hierzu auch Abschnitt 5.2.1).

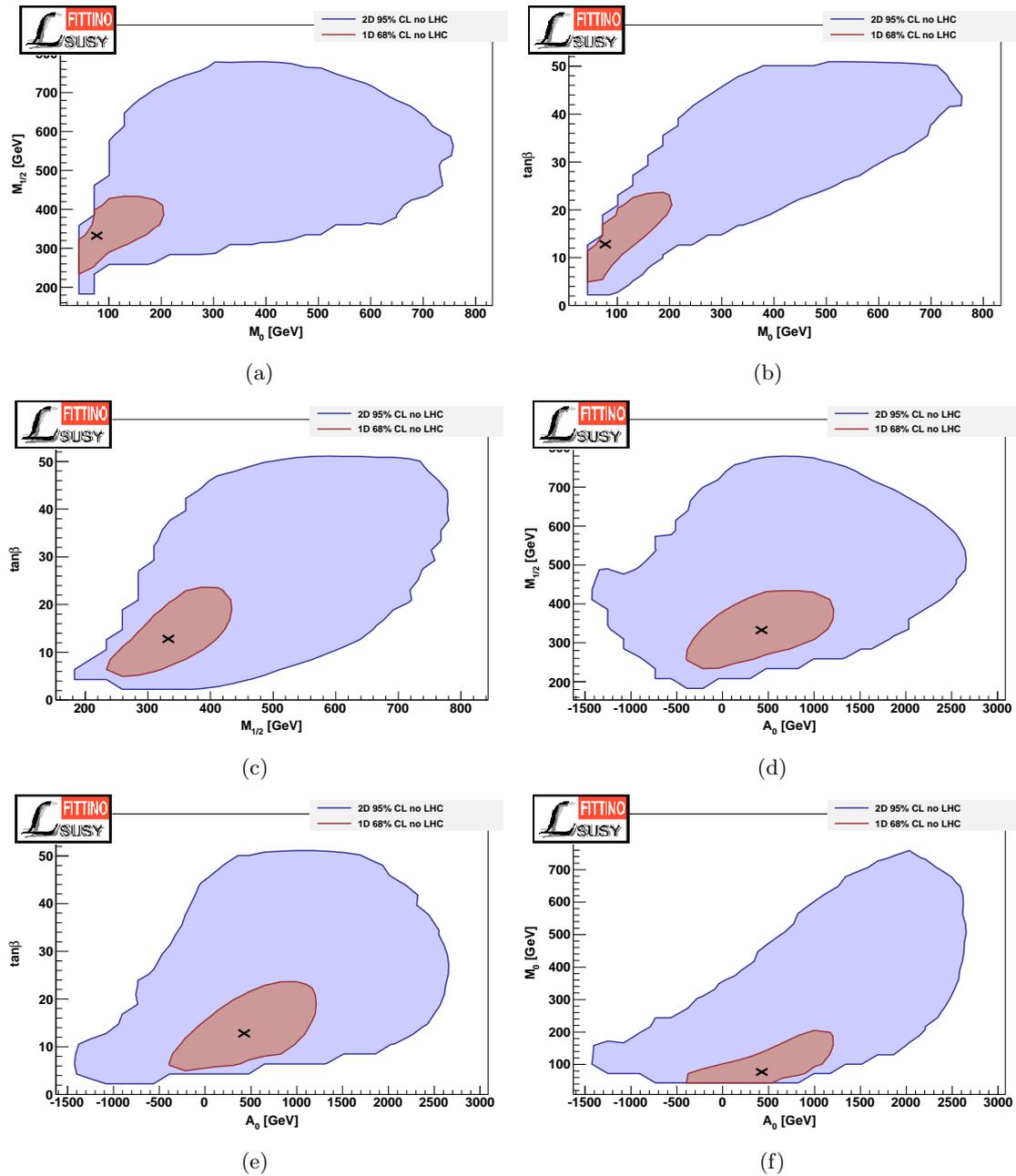


Abbildung 5.2: Zweidimensionale Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1

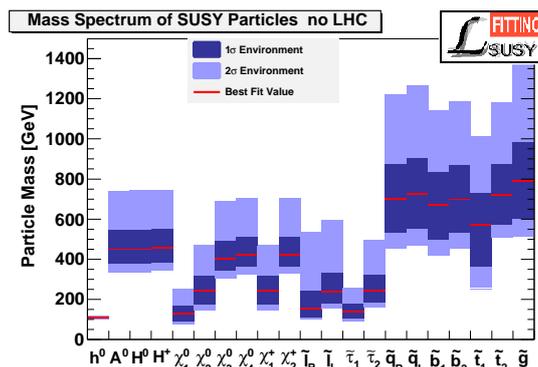


Abbildung 5.3: Vorhergesagtes Massenspektrum unter Berücksichtigung aller Niedrig-Energie-Messungen aus Tabelle 3.1

5.1.3 Massenspektrum

Abbildung 5.3 zeigt das Massenspektrum wie es der Fit der Niedrig-Energie-Messungen vorhersagt. Mit einer oberen Grenze von 1 TeV an die Squark- und Gluinomassen wäre es für den LHC schnell zugänglich.

5.2 Fits unter Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC

In den hier besprochenen Fits wurde nun zusätzlich zu den Niedrig-Energie-Observablen die (angenommene) Nicht-Entdeckung neuer Physik mit verschiedenen Luminositäten berücksichtigt. Für die Auswertung der bisher gesammelten 35 pb^{-1} hat ATLAS die Analyse im Vergleich zu [5] modifiziert. Wie Abbildung 5.4 zeigt, sind die damit erhaltenen Ausschlüsse und die in dieser Arbeit für 35 pb^{-1} erhaltenen Ausschlüsse im relevanten Bereich in guter Übereinstimmung. Daher kann der 35 pb^{-1} - Fit als ein Fit betrachtet werden, der die im Moment tatsächlich vorhandene Datenlage berücksichtigt.

5.2.1 Best-Fit-Punkte, \mathcal{P} -Werte und Pull-Verteilungen

Tabelle 5.2 stellt die Best-Fit-Punkte einschließlich 1σ - Umgebungen sowie das jeweils minimale χ^2 und die \mathcal{P} - Werte für die Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen und verschiedenen Luminositäten vergleichend zusammen.

Durch den hohen χ^2 - Beitrag des LHC in den Parameter-Bereichen, die von den Niedrig-Energie-Observablen bevorzugt werden, wird mit höherer Luminosität das χ^2/ndf -

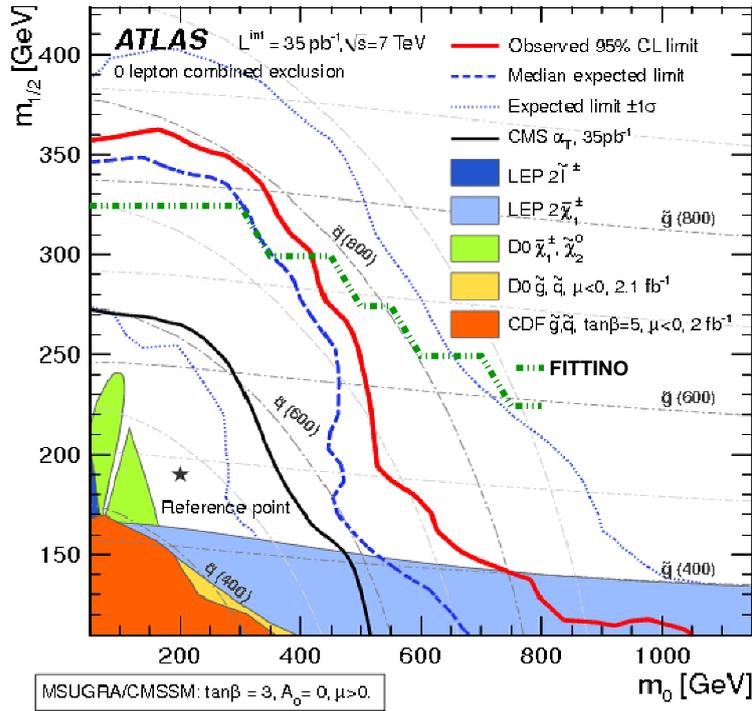


Abbildung 5.4: Vergleich der Ausschlüsse, wie sie das ATLAS-Experiment mit 35 pb^{-1} Luminosität Daten erhalten hat, und wie sie sich unter der Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik mit 35 pb^{-1} in dieser Arbeit ergibt

	M_0 [GeV]	$M_{1/2}$ [GeV]	A_0 [GeV]	$\tan \beta$	χ^2	ndf	P-Value [%]
no LHC	77_{-31}^{+114}	333_{-87}^{+89}	426_{-735}^{+704}	13_{-8}^{+10}	18.9	20	53
35 pb^{-1}	126_{-54}^{+189}	400_{-40}^{+109}	742_{-780}^{+722}	17_{-9}^{+14}	20.4	21	50
1 fb^{-1}	235_{-103}^{+389}	601_{-63}^{+148}	627_{-717}^{+1249}	31_{-18}^{+19}	23.7	21	31
2 fb^{-1}	254_{-128}^{+456}	647_{-74}^{+157}	771_{-879}^{+1254}	30_{-19}^{+20}	24.2	21	28
7 fb^{-1}	403_{-281}^{+436}	744_{-150}^{+142}	781_{-918}^{+1474}	43_{-33}^{+11}	25.0	21	25

Tabelle 5.2: Vergleich der Best-Fit-Punkte, χ^2/ndf und P-Werte der Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus 3.1 und der Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten

	M_0 [GeV]	$M_{1/2}$ [GeV]	A_0 [GeV]	$\tan \beta$	chi2	ndf	P-Value [%]
1 fb^{-1}	107^{+4568}_{-62}	611^{+3398}_{-493}	745^{+9252}_{-7264}	7^{+49}_{-5}	18.0	19	52
2 fb^{-1}	101^{+5150}_{-57}	601^{+3433}_{-484}	676^{+9322}_{-7233}	6^{+50}_{-4}	18.0	19	52
7 fb^{-1}	142^{+4566}_{-47}	752^{+3271}_{-636}	948^{+9049}_{-7473}	6^{+50}_{-4}	18.1	19	52

Tabelle 5.3: Vergleich der Best-Fit-Punkte, χ^2/ndf und P-Werte der Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus 3.1 außer Ω_{CDM} und a_μ und der Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten

Verhältnis größer und entsprechend der P-Wert schlechter. Selbst bei der Nicht-Beobachtung eines Signals bei 7 fb^{-1} ist das Verhältnis mit 25/21 aber immer noch klein genug, um mSUGRA als nicht ausgeschlossen anzusehen, auch wenn eine gewisse Spannung deutlich wird.

Weiterhin ist mit steigender Luminosität ein Größerwerden der Parameter M_0 , $M_{1/2}$ und $\tan \beta$ zu beobachten. Während sich der Anstieg von $M_{1/2}$ unmittelbar aus dem χ^2 -Beitrag des LHC erklären lässt, sind der Anstieg von $\tan \beta$ und zum großen Teil auch von M_0 durch Korrelationen dieser Parameter mit $M_{1/2}$ verursacht, die durch die Niedrig-Energie-Observablen Ω_{CDM} und a_μ erzeugt werden. Dies zeigt der Vergleich mit Tabelle 5.3, welche die gleichen Daten wie Tabelle 5.2 für die Fits ohne Ω_{CDM} und a_μ enthält.

Da die übrigen Messungen Supersymmetrie nur sehr schwach einschränken, steigt das χ^2 vom Best-Fit-Punkt ausgehend in diesen Fits nur sehr schwach an, was zu sehr großen Konfidenzbereichen der Parameter führt. Aufgrund mangelnder Statistik kann nicht garantiert werden, dass diese vollständig erfasst wurden, d.h. die Fehler in Tabelle 5.3 sind als Mindestwerte aufzufassen. Die geringe Einschränkung durch die verbleibenden Niedrig-Energie-Messungen führt auch dazu, dass der mit steigender Luminosität steigende χ^2 -Beitrag des LHC durch ein höheres $M_{1/2}$ kompensiert werden kann, ohne dass sich das totale χ^2 nennenswert erhöhen würde. Während sich aber $M_{1/2}$ ungefähr im gleichen Maße erhöht wie in den Fits mit Ω_{CDM} und a_μ , steigt hier M_0 weniger stark und $\tan \beta$ gar nicht an.

Den Einfluss von Ω_{CDM} und a_μ verdeutlicht Abbildung 5.5, die einen Ausschnitt der $M_0 - M_{1/2}$ - Ebene zeigt. Der Wert von $a_\mu - a_\mu^{\text{SM}}$ ist dort farbig kenntlich gemacht, wo er innerhalb des experimentellen 2σ - Bereichs liegt, in schwarz ist der entsprechende Bereich für $\Omega_{\text{CDM}} h^2$ gekennzeichnet. Die Werte von $\tan \beta$ und A_0 wurden dabei in den verschiedenen Unterabbildungen jeweils auf die Werte eines der Best-Fit-Punkte gesetzt. In jeder der Abbildungen sind zudem die Projektionen aller Best-Fit-Punkte eingezeichnet. Deutlich zu erkennen ist das Sinken von a_μ mit steigender SUSY-Massenskala sowie die

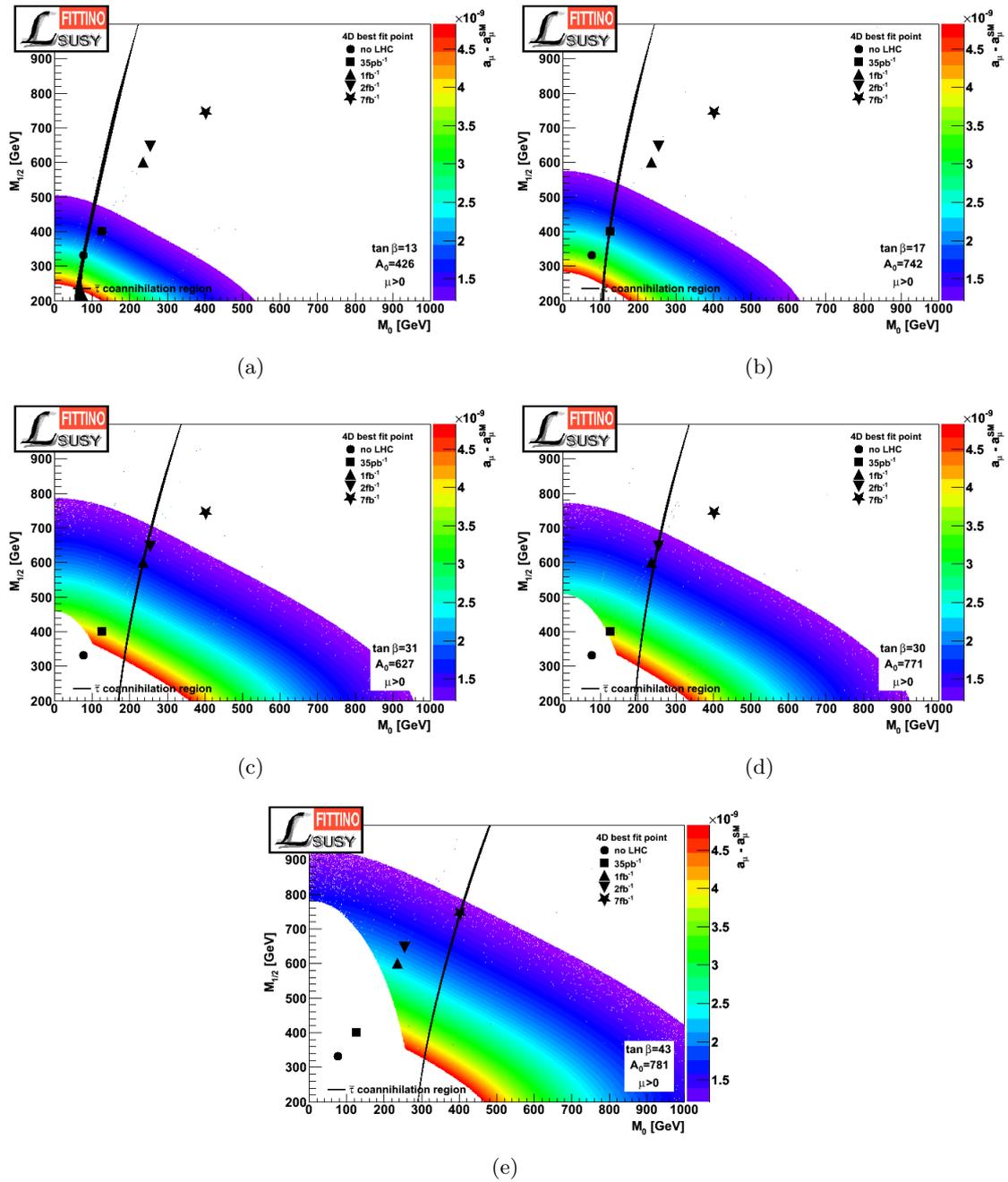


Abbildung 5.5: Bereiche der $M_0 - M_{1/2}$ - Ebene, in denen a_μ (farbig) bzw. Ω_{CDM} innerhalb ihres 2σ - Bereichs liegen, für verschiedene Werte von A_0 und $\tan \beta$. Ebenfalls eingezeichnet sind die Projektionen der Best-Fit-Punkte der Fits mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der Annahme der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten

gewohnte Form der Koannihilationsregion, in der sich alle Best-Fit-Punkte befinden. Diese Form erfordert für konstantes $\tan\beta$ und A_0 mit steigendem $M_{1/2}$ eine moderate Erhöhung von M_0 . Eine stetige Erhöhung von $M_{1/2}$ bei konstantem M_0 würde hingegen in den Bereich führen, in dem das $\tilde{\tau}$ das leichteste supersymmetrische Teilchen ist. Diese Erhöhung der SUSY-Massen-Skala aber führt zu einem Absinken von a_μ , das durch ein Ansteigen von $\tan\beta$ kompensiert werden kann (vgl. Gleichung 3.1). Ein Anstieg von $\tan\beta$ verschiebt aber wiederum die Koannihilationsregion zu größeren M_0 .

Als weiteres Merkmal von Tabelle 5.2 ist festzuhalten, dass mit steigender Luminosität die 1σ - Umgebungen der Parameter größer werden. Dieses gilt umso mehr für die zweidimensionalen 2σ - Umgebungen und wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

Abbildung 5.6 zeigt schließlich die Pull-Verteilungen der Niedrig-Energie-Observablen sowie die Wurzel des χ^2 - Beitrags des LHC an Best-Fit-Punkten aus Tabelle 5.2. Experimentelle Grenzen, die an diesen Punkten keinen χ^2 -Beitrag liefern, sind nicht verzeichnet. Bei einer Nicht-Entdeckung neuer Physik am LHC mit 2fb^{-1} oder 7fb^{-1} Luminosität weichen A_l und a_μ an den Best-Fit-Punkten ungefähr 2σ von ihren Messwerten ab. Der Beitrag von $A_{\text{FB}}^{0,b}$ am χ^2 sinkt hingegen auf ungefähr 2.6. Alle weiteren Observablen liegen an den Best-Fit-Punkten innerhalb der 2σ - Bereiche ihrer Messwerte.

5.2.2 Zweidimensionale Konfidenzbereiche

Die Änderung, welche die von den Daten bevorzugte $M_0 - M_{1/2}$ Parameterregion erfährt, wenn zusätzlich zu den Niedrig-Energie-Messungen die Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 35pb^{-1} Luminosität berücksichtigt wird, ist in Abbildung 5.7 zu sehen. Zusätzlich ist der Bereich kenntlich gemacht, der mit dieser Datenmenge vom LHC mit 95% CL ausgeschlossen wird. Es fällt auf, dass sich dieser ausgeschlossene Bereich mit dem mit 95 % erlaubten Bereich überlappt. Außerdem ist ersichtlich, dass der erlaubte Bereich größer wird.

Beide Effekte sind noch deutlicher in der entsprechenden Abbildung 5.8a zu sehen, in der die Nicht-Beobachtung von neuer Physik am LHC mit 2fb^{-1} angenommen wird. Der Übersichtlichkeit halber sind die eindimensionalen 1σ - Bereiche hier nicht eingezeichnet. Stattdessen markiert eine rote Linie einen Pfad in der $M_0 - M_{1/2}$ - Ebene, der die Projektion der Best-Fit-Punkte beider Fits durchläuft, dazwischen die Ausschlussgrenze kreuzt und schließlich erst den 2D- 2σ -Bereich des Fits ohne LHC und dann auch den 2D- 2σ -Bereich des Fits mit LHC verlässt.

Abbildung 5.8b zeigt entlang dieser Linie in orange den χ^2 - Beitrag des LHC sowie das für freies A_0 und $\tan\beta$ minimale χ^2 ohne Berücksichtigung des LHC (“no LHC”) und mit Berücksichtigung des LHC (“total”), normiert auf den Best-Fit-Punkt ohne LHC. Eine

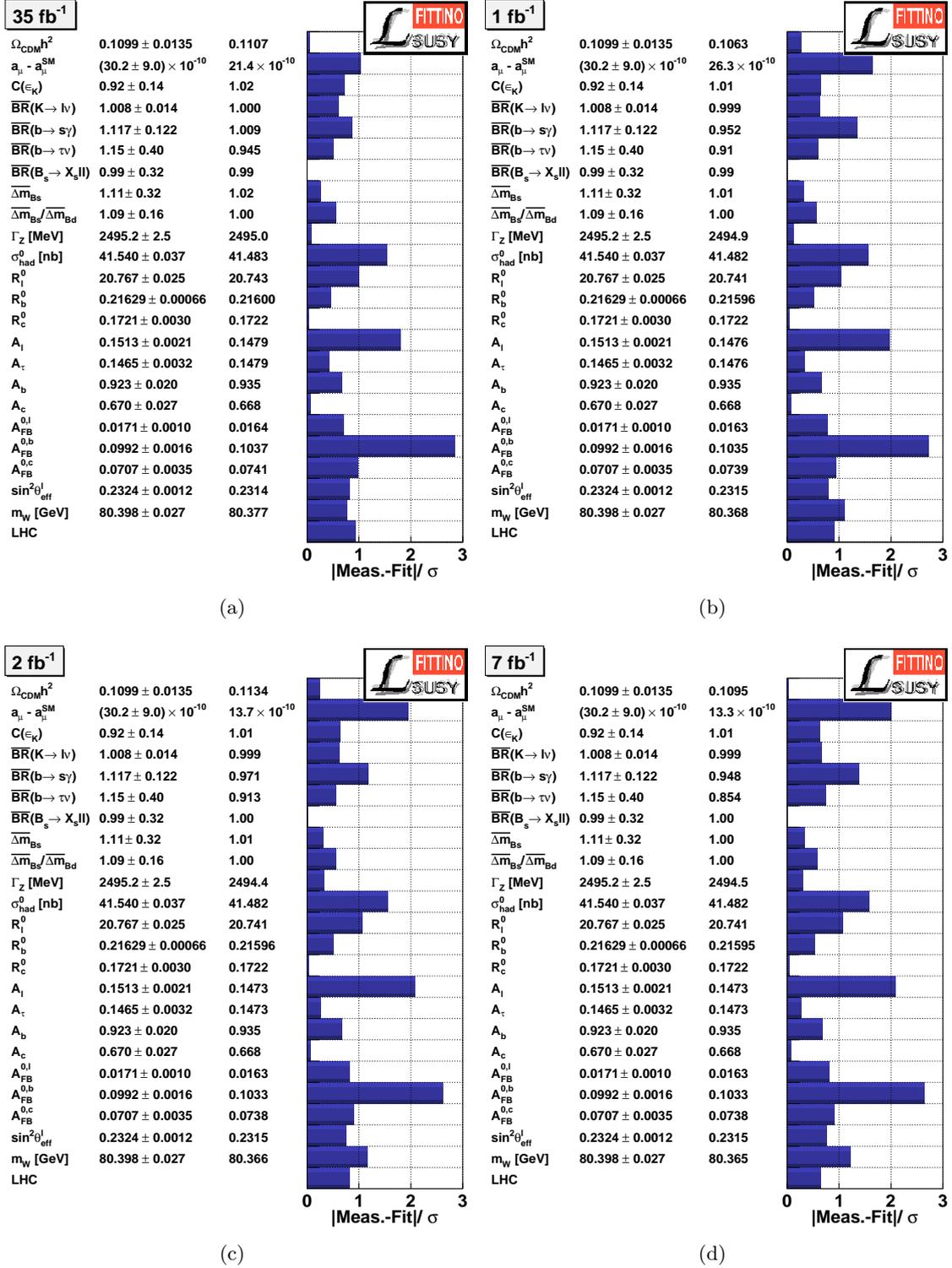


Abbildung 5.6: Pull-Verteilungen der Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 sowie die Wurzel des χ^2 -Beitrags des LHC an Best-Fit-Punkten aus Tabelle 5.2. Experimentelle Grenzen, die an diesen Punkten keinen χ^2 -Beitrag liefern, sind hier nicht verzeichnet.

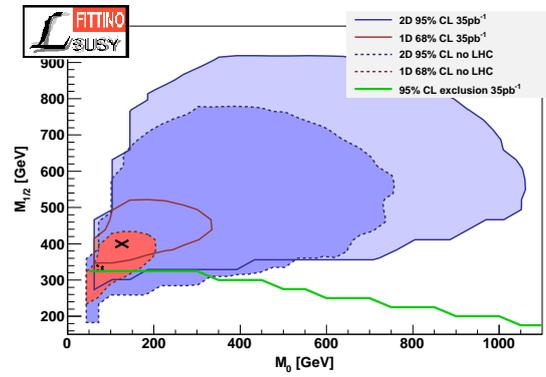


Abbildung 5.7: Vergleich der $M_0 - M_{1/2}$ Parameterregion, die mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 verträglich ist, mit der Parameterregion, die zusätzlich mit der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 35 pb^{-1} Luminosität verträglich ist. Durch den LHC allein wird der Bereich unterhalb der grünen Kurve mit 95% CL ausgeschlossen.

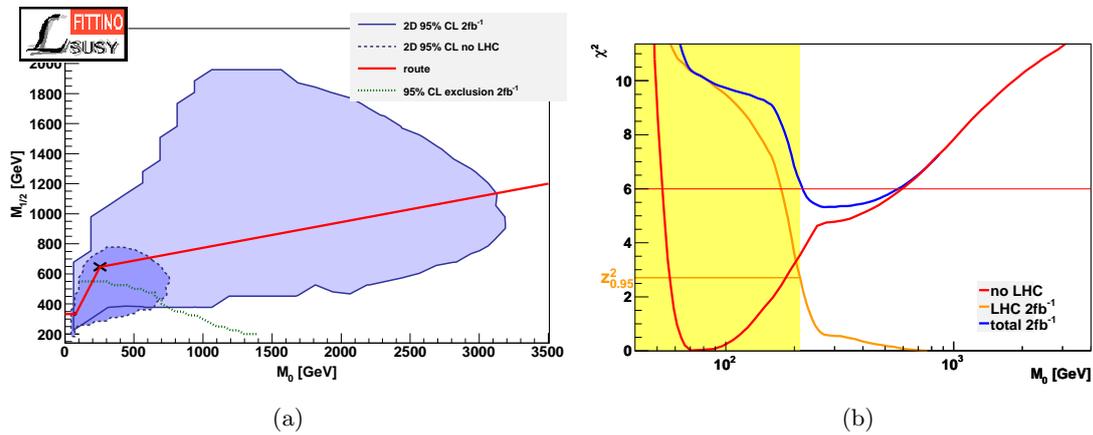


Abbildung 5.8: χ^2 -Profil (b) entlang der roten Linie im Parameterraum (a)

waagerechte rote Linie bei $\chi^2 = 6$ markiert die Stelle, an welcher der 2D- 2σ -Bereich des Fits ohne LHC verlassen wird, die obere Kante des Diagramms jene Stelle, an welcher der entsprechende Bereich des Fits mit LHC verlassen wird. Der Bereich, in dem der χ^2 -Beitrag des LHC größer ist als das 0.95-Quantil der Normalverteilung, ist mit 95% CL ausgeschlossen und gelb hinterlegt.

Es ist dieser Bereich, in dem der LHC den größten Beitrag zum χ^2 liefert und es ist dieser Bereich, in dem die kleinsten χ^2 Beiträge der Niedrig-Energie-Observablen liegen. Das führt dazu, dass es hier Punkte gibt, die vom LHC alleine zwar ausgeschlossen werden, durch den niedrigen χ^2 Beitrag der Niedrig-Energie-Observablen aber insgesamt ein χ^2 haben, welches sie noch in den erlaubten Bereich fallen lässt. Es verdeutlicht auch noch einmal, wo die einsetzende Spannung zwischen Niedrig-Energie-Messungen und der Nicht-Entdeckung am LHC herkommt.

Nachdem der LHC-Beitrag auf der Strecke zwischen den beiden Best-Fit-Punkten, welche fast parallel zur $M_{1/2}$ -Achse verläuft, stark abgefallen ist, nähert er sich auf dem folgenden Abschnitt, der fast parallel zur M_0 -Achse verläuft, langsam der Null an. Ab diesem Punkt unterscheiden sich die χ^2 -Werte des Fits ohne LHC und mit LHC nicht mehr. Da der minimale χ^2 -Wert im Fit mit LHC aber höher liegt, ist die $\Delta\chi^2 = 6$ Grenze bezüglich des Fits mit LHC-Beiträgen wesentlich später erreicht als für den Fit ohne LHC-Beitrag. Dies führt zu der Vergrößerung der Konfidenzbereiche, die auch in den Projektionen der anderen Parameter in den Abbildungen 5.9, 5.10, 5.11 und 5.12 sichtbar ist.

5.2.3 Massenspektren

Abbildung 5.13 vergleicht die Masse des \tilde{u}_R sowie des \tilde{l}_R wie sie sich aus den Fits unter der Annahme der Nicht-Entdeckung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten ergeben. Die vollständigen Massenspektren sind in Abbildung 5.14 zu finden. Bereits die Nicht-Entdeckung mit 1 fb^{-1} würde zu einer unteren Grenze der Squark-Massen von 1 TeV führen. Die untere Grenze der Slepton-Masse steigt von rund 100 GeV ohne LHC auf rund 300 GeV bei der Nicht-Entdeckung mit 7 fb^{-1} . Da der Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal explizit auf die Suche nach leichten Squarks ausgerichtet ist, ist davon auszugehen, dass der Anstieg der vorhergesagten Squark-Masse auch in einem allgemeineren MSSM-Modell als mSUGRA Bestand hat, während der Anstieg der Sleptonen-Masse vermutlich eher ein mSUGRA spezifischer Effekt der vereinigten Kopplungen ist. Dies zu untersuchen ist eine Aufgabe für die Zukunft.

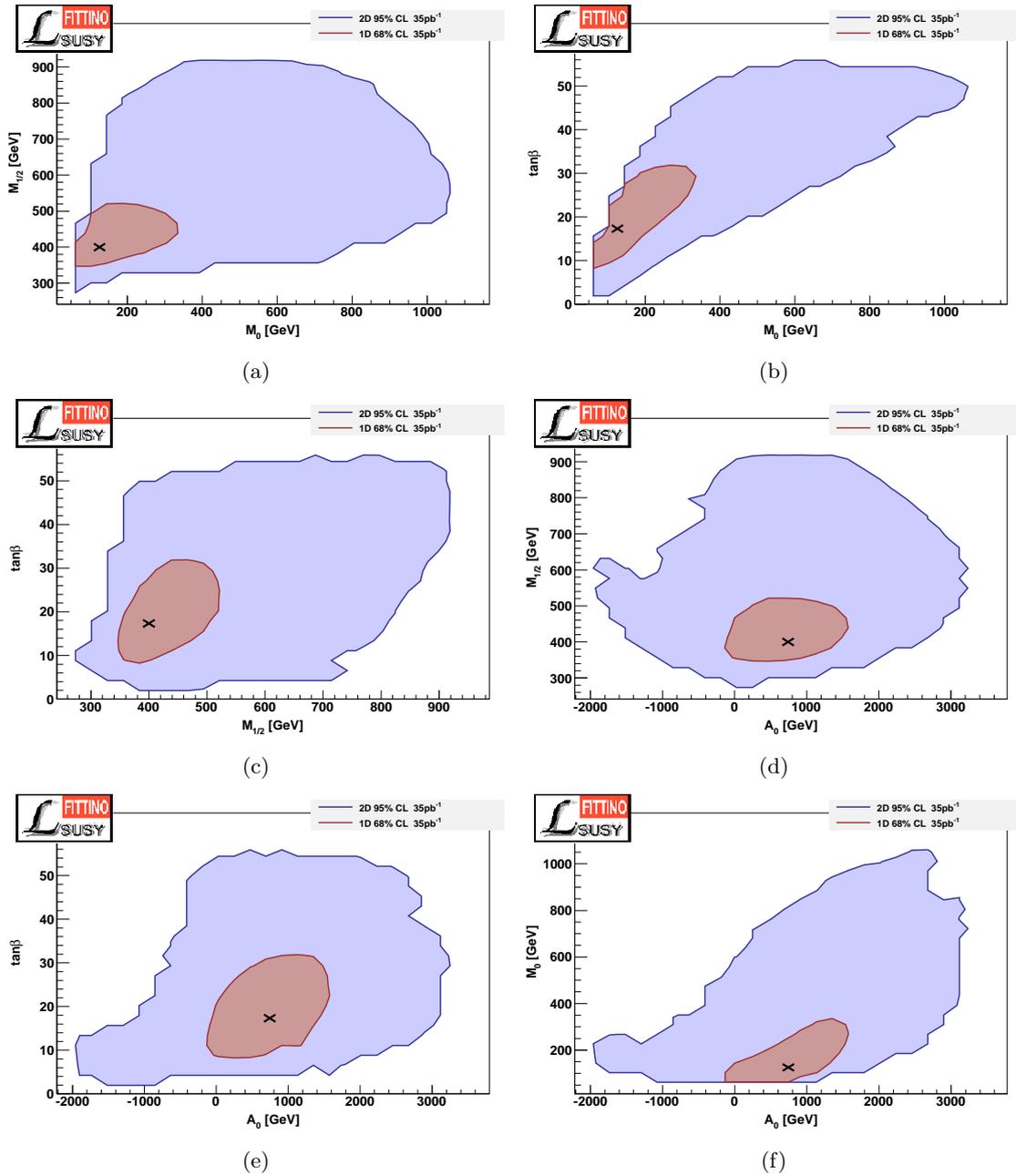


Abbildung 5.9: Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 35 pb^{-1}

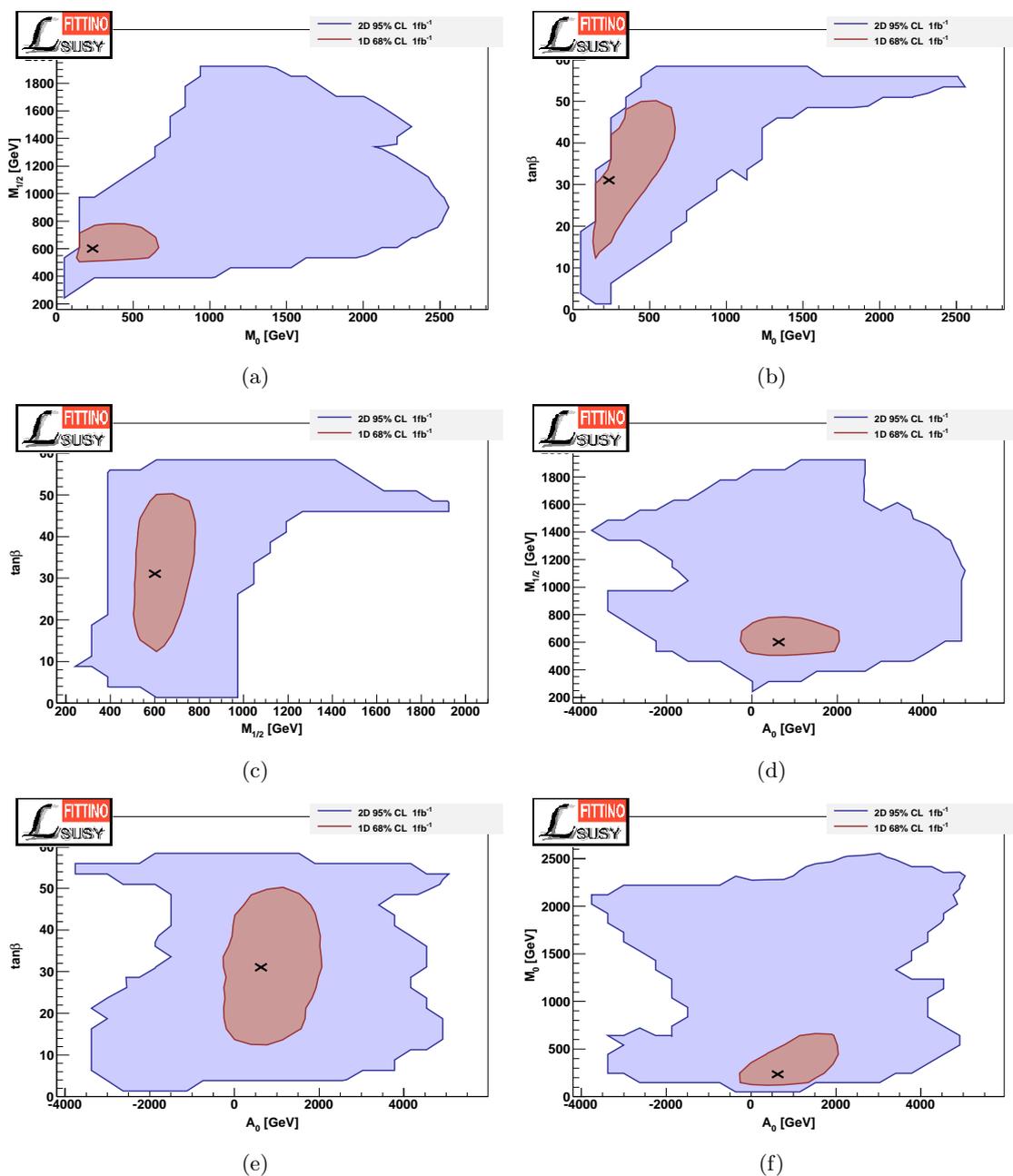


Abbildung 5.10: Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der angenommenen Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 1 fb^{-1}

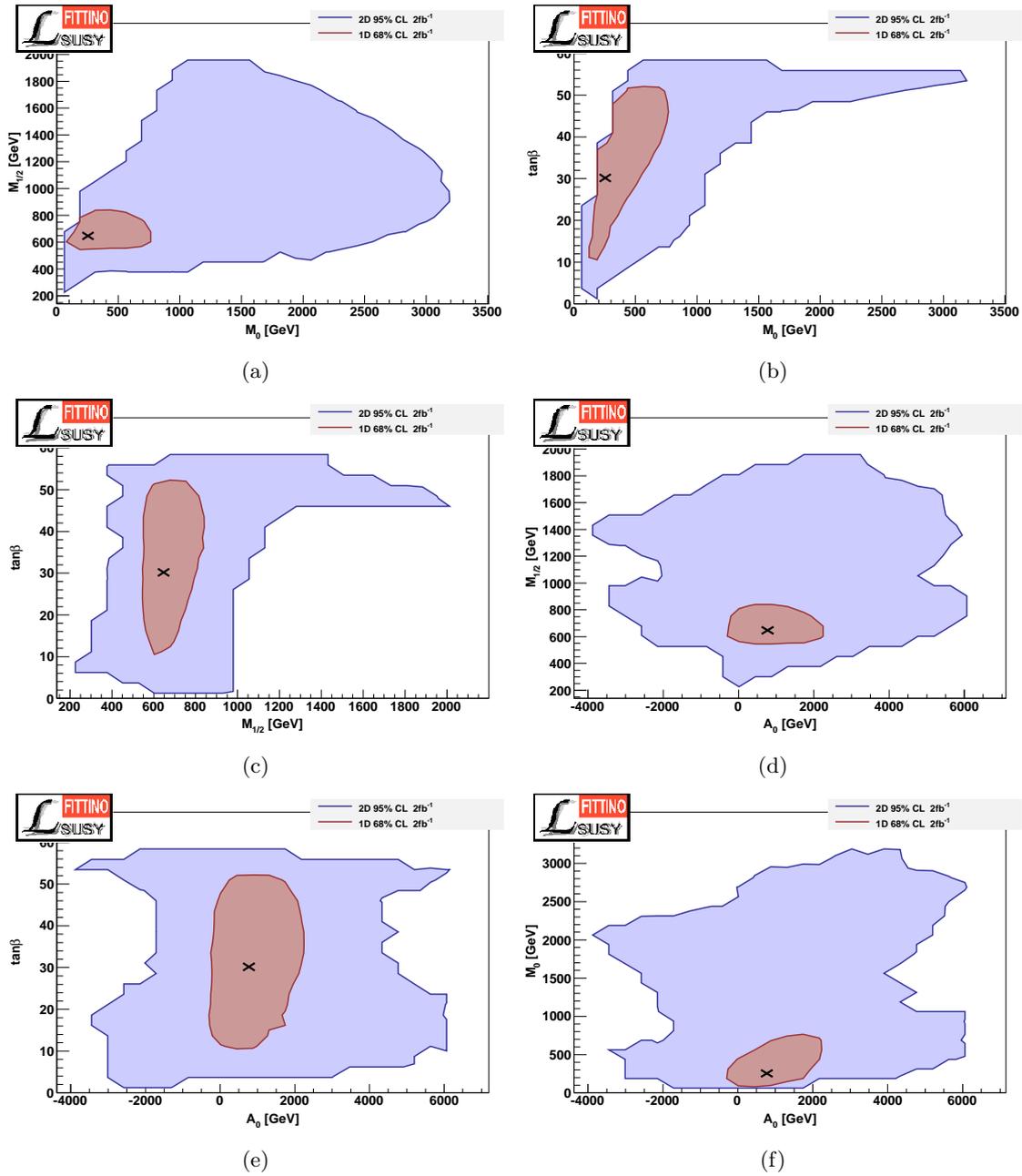


Abbildung 5.11: Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der angenommenen Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 2 fb^{-1}

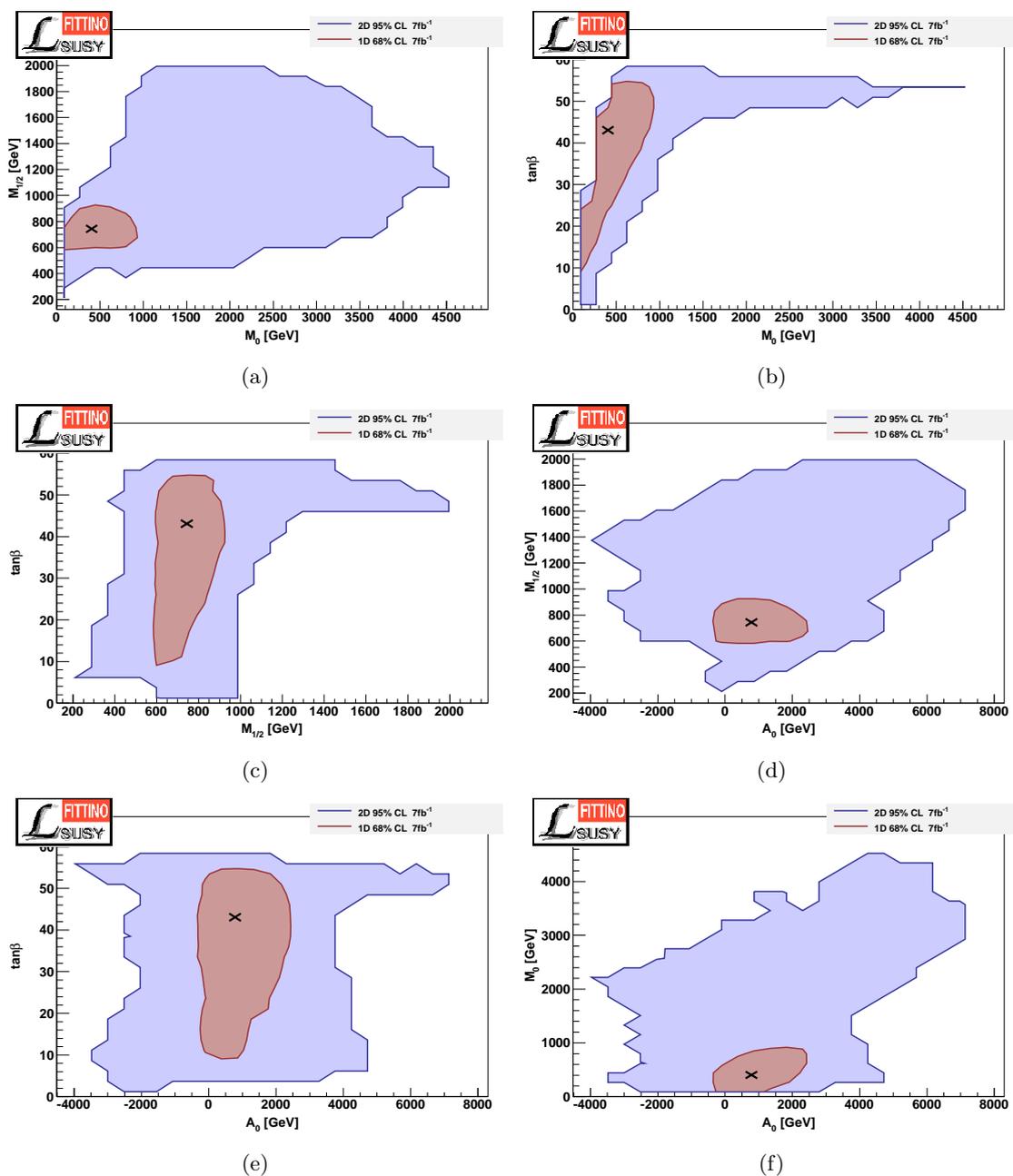


Abbildung 5.12: Parameterregionen verträglich mit allen Niedrig-Energie-Observablen aus Tabelle 3.1 und der angenommenen Nicht-Beobachtung neuer Physik am LHC mit 7 fb⁻¹

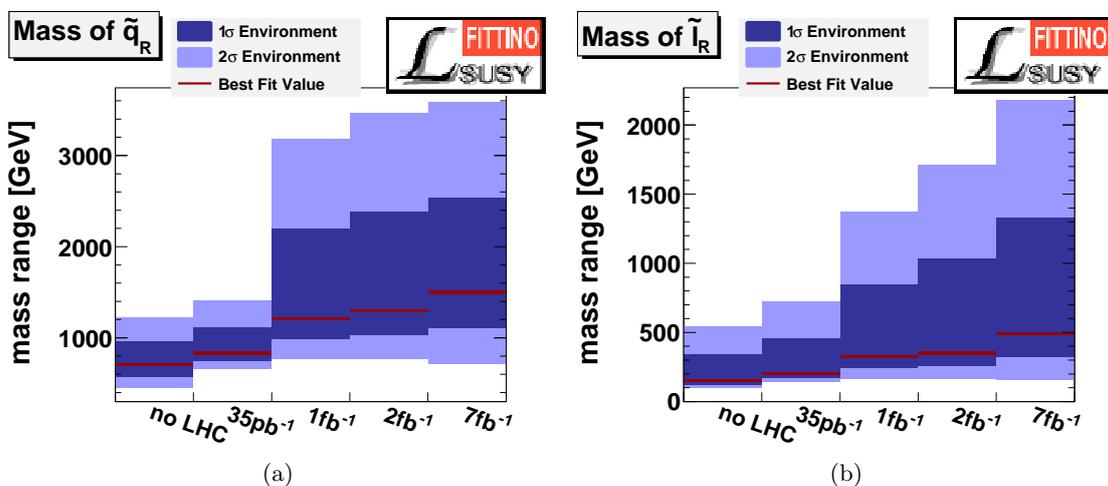


Abbildung 5.13: Vergleich der vorhergesagten Massen des (a) \tilde{u}_R bzw. (b) \tilde{l}_R bei Berücksichtigung aller Niedrig-Energie-Observablen aus 3.1 und unter der Annahme der Nicht-Entdeckung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten.

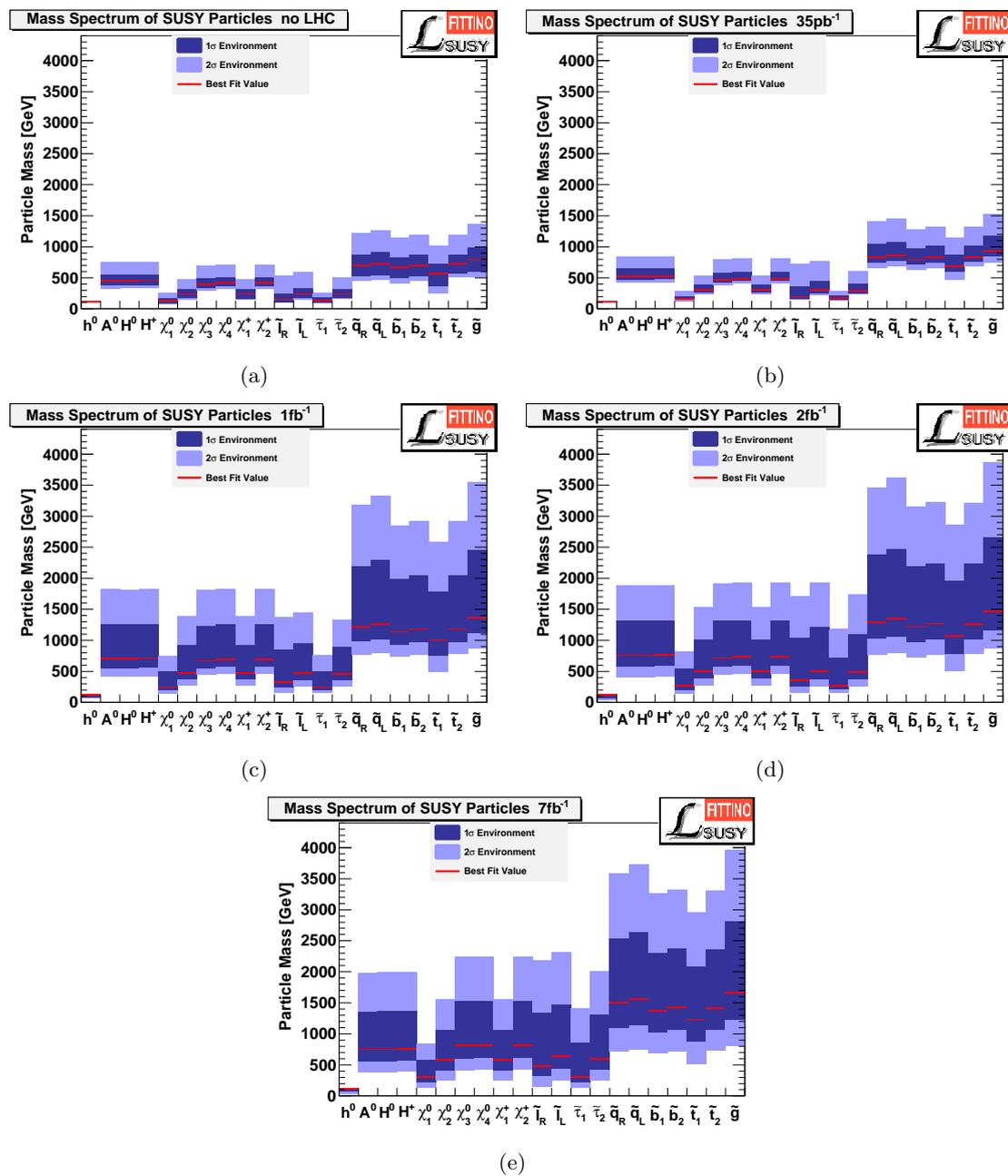


Abbildung 5.14: Vorhergesagte Massenverteilungen unter Berücksichtigung aller Niedrig-Energie-Observablen aus 3.1 und unter der Annahme der Nicht-Entdeckung neuer Physik am LHC mit verschiedenen Luminositäten

6 Schlussfolgerung

In dieser Arbeit wurde untersucht, welche Auswirkungen eine Nicht-Entdeckung neuer Physik am LHC auf das mSUGRA-Modell hat. Es wurde sowohl die jetzige Situation einer Nicht-Entdeckung mit 35 pb^{-1} Luminosität, als auch mögliche Nicht-Entdeckungen mit 1 fb^{-1} , 2 fb^{-1} und 7 fb^{-1} bei 7 TeV Schwerpunktsenergie untersucht.

Dafür wurde der Vier-Jets-Null-Leptonen-Kanal betrachtet, da dieser die größte Sensitivität auf Supersymmetrie und die kleinste Abhängigkeit von $\tan\beta$ und A_0 verspricht.

Es wurde angenommen, dass die beobachteten Raten genau den vom Standardmodell vorhergesagten Raten entsprechen.

Zur theoretischen Vorhersage im mSUGRA-Modell wurde ein Grid in M_0 und $M_{1/2}$ erzeugt. Dazu wurde an 500 Parameterpunkten eine Monte-Carlo-Generation, Detektor-Simulation und Analyse durchgeführt.

Für jedes Luminositätsszenario wurde dann ein globaler Fit durchgeführt, der Niedrig-Energie-Observablen, die Relikt-Dichte Dunkler Materie sowie die durch Interpolation aus dem Grid gewonnenen vorhergesagten LHC-Raten berücksichtigte. Aus letzteren wurde mittels eines Neyman-Pearson-Tests gegenüber dem Standardmodell zunächst das Sicherheitsniveau für einen Ausschluss des betrachteten Parameterpunktes und dann ein $Q^2(\vec{x}, \vec{\theta})$ -Beitrag ermittelt.

Die Nicht-Entdeckung mit 35 pb^{-1} , 1 fb^{-1} , 2 fb^{-1} beziehungsweise 7 fb^{-1} führt zu minimalen $Q^2(\vec{x}, \vec{\theta})$ -Werten von 20.4, 23.7, 24.2 beziehungsweise 25.0 bei 21 Freiheitsgeraden. Damit ist das mSUGRA-Modell selbst bei einer Nicht-Entdeckung mit 7 fb^{-1} nicht ausgeschlossen. Da das mSUGRA-Modell ein sehr stark eingeschränktes Modell ist, gilt das umso mehr für allgemeinere Modelle und Supersymmetrie als Ganzes.

In dieser Arbeit nicht untersucht wurde der Fall, dass der LHC ein leichtes Higgsboson ausschließt. Da Supersymmetrie ein leichtes Higgs-Boson voraussagt, könnte sie auf diesem Wege ausgeschlossen werden.

Die Nicht-Entdeckung mit 1 fb^{-1} führt zu einer unteren Grenze der Squark-Massen von 1 TeV . Die untere Grenze der Slepton-Massen steigt in diesem Fall auf über 200 GeV , im Fall der Nicht-Entdeckung mit 7 fb^{-1} auf über 300 GeV .

Es ist davon auszugehen, dass letzteres ein Effekt der vereinigten Massenskalen im mSUGRA-Modell ist. Die Massengrenzen in anderen und allgemeineren SUSY-Modellen zu untersuchen, ist Aufgabe für die Zukunft.

Sie würde in dieser Form in dem Augenblick obsolet werden, in dem das eigentliche Ziel erreicht wird: Eine Entdeckung neuer Physik.

Literaturverzeichnis

- [1] Particle Data Group, K. Nakamura *et al.*, J.Phys.G **G37**, 075021 (2010).
- [2] M. Battaglia, I. Hinchliffe, and D. Tovey, J.Phys.G **G30**, R217 (2004), arXiv:hep-ph/0406147.
- [3] M. Kamionkowski, (1996), arXiv:hep-ph/9609531.
- [4] M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu, and Z. Zhang, Eur.Phys.J. **C71**, 1515 (2011), arXiv:1010.4180.
- [5] C. ATLAS, CERN Report No. ATL-PHYS-PUB-2010-010, 2010 (unpublished).
- [6] P. Bechtle, K. Desch, M. Uhlenbrock, and P. Wienemann, Eur.Phys.J. **C66**, 215 (2010), arXiv:0907.2589.
- [7] Sexl and Urbantke, *Relativity, Groups, Particles* (Springer, 2001).
- [8] Jones, *Groups, Representations and Physics* (Taylor & Francis, 1998).
- [9] Chaichian and Hagedorn, *Symmetries in Quantum Mechanics* (Institute of Physics Publishing, 1998).
- [10] J. Louis, I. Brunner, and S. J. Huber, (1998), arXiv:hep-ph/9811341.
- [11] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books, 1995).
- [12] S. P. Martin, (1997), arXiv:hep-ph/9709356.
- [13] E. Noether, Gott.Nachr. **1918**, 235 (1918), arXiv:physics/0503066.
- [14] J. L. Lagrange, *Mécanique analytique* (Courcier, 1788).
- [15] S. Lie, Mathematische Annalen **16**, 441 (1880), 10.1007/BF01446218.
- [16] K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz, and M. Kraus, *Moderne mathematische Methoden der Physik, Band 2*, 1st ed. (Springer, 2010).
- [17] A. Einstein, Annalen Phys. **17**, 891 (1905).

- [18] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson, *Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957).
- [19] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138 (1964).
- [20] O. Greenberg, *Phys.Rev.Lett.* **89**, 231602 (2002), arXiv:hep-ph/0201258.
- [21] H. Minkowski, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **1909** (1909).
- [22] P. A. Dirac, *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A117**, 610 (1928).
- [23] E. Majorana, *Nuovo Cimento* **14** (1937).
- [24] J. C. Maxwell, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **1865** (1865).
- [25] J. Schwinger, *Selected papers on quantum electrodynamics* (Dover Publications, 1958).
- [26] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [27] D. Gross and F. Wilczek, *Phys.Rev.Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [28] S. R. Coleman and J. Mandula, *Phys.Rev.* **159**, 1251 (1967).
- [29] Y. Golfand and E. Likhtman, *JETP Lett.* **13**, 323 (1971).
- [30] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, *Nuclear Physics B* **88**, 257 (1975).
- [31] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [32] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963).
- [33] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Progress of Theoretical Physics* **49**, 652 (1973).
- [34] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Phys. Rev. D* **2**, 1285 (1970).
- [35] WMAP Collaboration, J. Dunkley *et al.*, *Astrophys.J.Suppl.* **180**, 306 (2009), arXiv:0803.0586.
- [36] F. Zwicky, *Helv.Phys.Acta* **6**, 110 (1933).
- [37] V. Rubin, N. Thonnard, and J. Ford, W.K., *Astrophys.J.* **238**, 471 (1980).
- [38] A. Taylor, S. Dye, T. J. Broadhurst, N. Benitez, and E. van Kampen, (1998), arXiv:astro-ph/9801158.
- [39] A. Einstein, *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)* **1915**, 778 (1915).
- [40] A. Einstein, *Annalen der Physik* (1916).
- [41] N. Straumann, (2002), arXiv:gr-qc/0208027.

- [42] A. Friedman, *Zeitschrift fur Physik* **10**, 377 (1922).
- [43] A. Friedmann, *Zeitschrift fur Physik* **21**, 326 (1924).
- [44] B. Paczynski, *Astrophysical Journal* **304**, 1 (1986).
- [45] EROS-2 Collaboration, P. Tisserand *et al.*, *Astron.Astrophys.* **469**, 387 (2007), arXiv:astro-ph/0607207.
- [46] V. Springel, C. S. Frenk, and S. D. White, *Nature* **440**, 1137 (2006), arXiv:astro-ph/0604561.
- [47] Muon g-2 Collaboration, G. Bennett *et al.*, *Phys.Rev.Lett.* **92**, 161802 (2004), arXiv:hep-ex/0401008.
- [48] T. Moroi, *Phys.Rev.* **D53**, 6565 (1996), arXiv:hep-ph/9512396.
- [49] UFit Collaboration, M. Bona *et al.*, *JHEP* **0803**, 049 (2008), arXiv:0707.0636.
- [50] FlaviaNet Working Group on Kaon Decays, M. Antonelli *et al.*, (2008), arXiv:0801.1817.
- [51] E949 Collaboration, A. Artamonov *et al.*, *Phys.Rev.Lett.* **101**, 191802 (2008), arXiv:0808.2459.
- [52] Heavy Flavor Averaging Group (HFAG), E. Barberio *et al.*, (2006), arXiv:hep-ex/0603003.
- [53] BABAR Collaboration, B. Aubert *et al.*, *Phys.Rev.Lett.* **95**, 041804 (2005), arXiv:hep-ex/0407038.
- [54] ALEPH Collaboration, DELPHI Collaboration, L3 Collaboration, OPAL Collaboration, SLD Collaboration, LEP Electroweak Working Group, SLD Electroweak Group, SLD Heavy Flavour Group, *Phys.Rept.* **427**, 257 (2006), arXiv:hep-ex/0509008.
- [55] LEP Working Group for Higgs boson searches, ALEPH Collaboration, DELPHI Collaboration, L3 Collaboration, OPAL Collaboration, R. Barate *et al.*, *Phys.Lett.* **B565**, 61 (2003), arXiv:hep-ex/0306033.
- [56] ALEPH Collaboration, DELPHI Collaboration, L3 Collaboration, OPAL Collaborations, LEP Working Group for Higgs Boson Searches, S. Schael *et al.*, *Eur.Phys.J.* **C47**, 547 (2006), arXiv:hep-ex/0602042.
- [57] G. Degrossi, S. Heinemeyer, W. Hollik, P. Slavich, and G. Weiglein, *Eur.Phys.J.* **C28**, 133 (2003), arXiv:hep-ph/0212020.
- [58] Particle Data Group, C. Amsler *et al.*, *Phys.Lett.* **B667**, 1 (2008).

- [59] J. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948).
- [60] D. Stockinger, J.Phys.G **G34**, R45 (2007), arXiv:hep-ph/0609168.
- [61] P. Bechtle, O. Brein, S. Heinemeyer, G. Weiglein, and K. E. Williams, Comput.Phys.Commun. **182**, 2605 (2011), arXiv:1102.1898.
- [62] O. Buchmueller *et al.*, JHEP **0809**, 117 (2008), arXiv:0808.4128.
- [63] G. Belanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov, Comput.Phys.Commun. **149**, 103 (2002), arXiv:hep-ph/0112278.
- [64] G. Belanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov, Comput.Phys.Commun. **174**, 577 (2006), arXiv:hep-ph/0405253.
- [65] F. Mahmoudi, Comput.Phys.Commun. **178**, 745 (2008), arXiv:0710.2067.
- [66] S. Heinemeyer, W. Hollik, and G. Weiglein, Comput.Phys.Commun. **124**, 76 (2000), arXiv:hep-ph/9812320.
- [67] W. Porod, Comput.Phys.Commun. **153**, 275 (2003), arXiv:hep-ph/0301101.
- [68] M. Bahr *et al.*, Eur.Phys.J. **C58**, 639 (2008), arXiv:0803.0883.
- [69] S. Oryn, X. Rouby, and V. Lemaître, (2009), arXiv:0903.2225.
- [70] W. Beenakker, R. Hopker, and M. Spira, (1996), arXiv:hep-ph/9611232.
- [71] H.-O. Georgii, *Stochastik* (deGruyter, 2002).
- [72] G. Cowan, *Statistical Data Analysis* (Oxford University Press, 1998).
- [73] R. Barlow, *Statistics* (Wiley, 1989).
- [74] F. James, *Statistical Methods in Experimental Physics* (World Scientific, 2006).
- [75] A. N. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer, 1933).
- [76] P. Bechtle, K. Desch, and P. Wienemann, Comput.Phys.Commun. **174**, 47 (2006), arXiv:hep-ph/0412012.
- [77] I. Antcheva *et al.*, Comput.Phys.Commun. **180**, 2499 (2009).
- [78] ALEPH Collaboration, DELPHI Collaboration, L3 Collaboration, OPAL Collaboration, SLD Collaboration, LEP Electroweak Working Group, SLD Electroweak Group, SLD Heavy Flavour Group, Phys.Rept. **427**, 257 (2006), arXiv:hep-ex/0509008.
- [79] P. Z. Skands *et al.*, JHEP **0407**, 036 (2004), arXiv:hep-ph/0311123.
- [80] B. Allanach *et al.*, Comput.Phys.Commun. **180**, 8 (2009), arXiv:0801.0045.

Ich danke herzlich . . .

Dr. Philip Bechtle,

Prof. Dr. Gudrid Moortgat-Pick,

der FITTINO-Gruppe,

der DESY-ATLAS-Gruppe,

meiner Familie

und Vicky.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Hamburg, den 16.04.2011

Björn Sarrazin